

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 39 (Aufgaben 39.1 - 39.3)

Abgabe: Di 12.01.2010 um 11 Uhr

Aufgabe 39.1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung)

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

i) $y' = x^3 y^2$,

ii) $y' \tan x = \cot y$,

iii) $y' + 2xy = 2e^{-x^2}$,

iv) $y' = \frac{xe^y}{x^2 + 1}$ mit $y(0) = 0$,

v) $(x \ln x)y' + y = 2 \ln x$,

vi) $dx + x dy = e^{-y} \sec^2 y dy$.

[Lösungen : i) $1/y = c - x^4/4$, ii) $\sin x \cos y = c$, iii) $y = (2x + c)e^{-x^2}$,
iv) $e^{-y} = 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, v) $y \ln x = (\ln x)^2 + c$, vi) $x = e^{-y}(c + \tan y)$]

(6 Punkte)

Aufgabe 39.2 (Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung)

a) Finde die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

i) $y'' + y' + y = e^x \cos 2x$,

ii) $y'' - 2y' + y = 0$,

iii) $y'' - y' - 2y = 44 - 76x - 48x^2$,

iv) $y'' - 9y = 54e^{3x}$

v) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$.

b) Löse das Anfangswertproblem: $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$.

c) Zeige, dass $y = (x + 1)e^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $3y'' + 2y' + 3y = 4xe^{-x}$ ist und finde die allgemeine Lösung.

d) Forme die Differentialgleichung $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ mittels der Transformation $x = e^t$ in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten um. Zeige, dass die allgemeine Lösung durch $y = a \cos(b + 2 \ln x)$ gegeben ist.

(11 Punkte)

Aufgabe 39.3 (Jordan-Basis)

Sei $L_n(\lambda)$ der Vektorraum aller Funktionen der Form $P(x) \exp(\lambda x)$ wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $P(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade $\leq n - 1$ ist. Betrachte die Basiselemente

$$e_{i+1} = \frac{x^i}{i!} \exp(\lambda x) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Finde die darstellende Matrix der Differentiationsabbildung $L := \frac{d}{dx} \in \text{End}(L_n(\lambda))$ bezüglich dieser Basis. Diese heißt eine Jordanmatrix und die Funktionen $(\frac{x^i}{i!} \exp(\lambda x))$ bilden eine Jordan-Basis für die Abbildung L in dem Vektorraum $L_n(\lambda)$.

(3 Punkte)