Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 38 (Aufgaben 38.1 - 38.3)

Abgabe: Di 5.01.2010 um 11 Uhr (Aufgabe 38.3 spätestens am 12.01.2010)

Aufgabe 38.1 (Fouriertransformation)

a) Zeige, dass die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1\,, & |x| \leq 1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases}$
gegeben ist durch: $\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{2}{k}\sin k & , \quad k \neq 0 \\ 2 & , \quad k = 0 \end{cases}$.

Zeige durch Inversion, dass: $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

(Vgl. dieses Resultat mit der Berechnung dieser Formel mit Hilfe des Residuensatzes in der Vorlesung.) (4 Punkte)

b) Zeige, dass die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gegeben ist durch: $\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|}\right\} = \widehat{f}(k) = 2a(k^2 + a^2)^{-1}$, $k \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)

c) Nun erziele dieses Ergebnis durch Schleifenintegration in der komplexen Ebene: Sei $g(x) = (x^2 + a^2)^{-1}$, $a > 0$. Berechne durch Integration einer geeigneten Funktion um einen großen Halbkreis die Fouriertransformierte $\mathcal{F}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2}\, dx$.

Für $k < 0$ bzw. $k > 0$ muß der Halbkreis in der oberen bzw. in der unteren Halbebene geschlossen werden. (Vgl. Aufgabe 37.1 b)) (4 Punkte)

Aufgabe 38.2 (Allgemeine Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen)

a) Finde gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeine Lösungen wie folgt gegeben sind (c ist eine beliebige Konstante.):

i) $y = ce^x$, ii) $y = e^{cx}$, iii) $y = c\sin x$,

iv) $y = \sin(x + c)$, v) $y = \sin cx$, vi) $y = x - 1 + ce^{-x}$.

b) Finde gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösungen wie folgt gegeben sind (a und b sind beliebige Konstanten.):

i) $y = a\cos 3x + b\sin 3x$, ii) $y = a\cos(3x + b)$, iii) $y = ae^x + be^{-2x}$,

iv) $y = ae^x + be^{-2x} + \sin x$, v) $y = (a + bx)e^{2x}$, vi) $y = ae^{bx}$.

c) Zeige, dass $y = ae^{-x}\sin(2x + b)$ die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 5y = 0$ ist.

d) Zeige, dass $y = ae^{-x} + be^{3x} + 1 - x^2$ die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + 4x - 5$ ist und finde die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt.

(8 Punkte)

Aufgabe 38.3 (Ein Trick mit dem Kotangens) (20 Bonuspunkte)

a) Finde die Pole und Residuen von $g(z) := \dfrac{\cot(\pi z)}{z^2}$.

[Tipp: Das Residuum bei 0 ($-\pi/3$), also der Koeffizient von $1/z$ in der Laurententwicklung, läßt sich am leichtesten mit der Taylorentwicklung für cos und sin berechnen.]

b) Zeige: Ist $f(z)$ holomorph und nicht singulär bei $z = n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\mathrm{Res}_{z=n}\big(f(z)\cot(\pi z)\big) = \frac{f(n)}{\pi} .$$

c) Betrachte das Integral $\int_C g(z)\ dz$, wobei C das ursprungszentrierte Quadrat mit den Eckpunkten $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ und N eine postive ganze Zahl ist.

Zeige, dass:

$$\frac{1}{2\pi}\int_C g(z)\ dz = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} .$$

Betrachte nun die bekannte Ungleichung

$$\left|\int_C g(z)\ dz\right| \leq (\text{Umfang von } C) \times (\sup |g| \text{ auf } C) .$$

Zeige für hinreichend große N: $\quad \left|\int_C g(z)\ dz\right| < \dfrac{2}{N^2}\ (8N+4)$

und somit: $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\int_C g(z)\ dz = 0$. Daraus folgt (vgl. Aufgabe 23.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

d) Argumentiere auf ähnliche Weise, dass für $f(z)$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| < (\text{const})/|z^2|$ für genügend große $|z|$ gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{\text{Pole von } f(z)} \mathrm{Res}\big(f(z)\cot(\pi z)\big) .$$

Sollte einer der Pole von $f(z)$ eine ganze Zahl sein, dann verstehen wir die Summe auf der linken Seite so, dass dieser Wert n ausgelassen wird.

Nun zeige, dass:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{w^2 - n^2} = \frac{\pi\cot\pi w}{w} \quad , \ w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} .$$

Daraus folgt die bemerkenswerte Partialbruchentwicklung des Kotangens:

$$\pi\cot\pi w = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w+n} + \frac{1}{w-n}\right) .$$

Zur weiteren Bewunderung dieser Formel von Euler wird die Lektüre von Kap. 23 in "Das BUCH der Beweise" von Aigner und Ziegler empfohlen. Den Link zur Online-Ausgabe (freier Zugang aus Uni-Rechnern) steht auf der Webseite.