Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 37 (Aufgaben 37.1 - 37.3)

Abgabe am Di 15.12.2009 um 11 Uhr

Aufgabe 37.1 (Reelle, uneigentliche Integrale)

Zeige durch Integration einer geeigneten komplexen Funktion um einen großen Halbkreis, dass:

$$\text{a)} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \; , \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a} \; .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 37.2 (Trigonometrische Integrale)

a) Zeige mit dem Residuenkalkül:

$$i) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \; , \qquad ii) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{4} \; .$$

[Schreibe $z = e^{i\theta}$ und integriere um den Einheitskreis.]

b) Benutze die Binomialentwicklung und Cauchys Integralsatz, um $\int_C (z+1/z)^{2n} \; \frac{dz}{z}$ zu berechnen und zeige damit: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. (Vgl. Aufgabe 17.5)

(8 Punkte)

Aufgabe 37.3 (Legendre-Polynome)

Die Legendre-Polynome $P_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, sind definiert (s. Aufgabe 18.1) durch

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2-1)^n \right] . \tag{1}$$

Diese Polynome sind wichtig für viele physikalische Probleme einschließlich der quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoffatoms.

a) Zeige mit Cauchys Integralformel, dass:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \; ,$$

wobei C ein einfach geschlossener Weg um z ist.

b) Zeige, wenn C der Kreis vom Radius $\sqrt{|z^2-1|}$ mit Mittelpunkt z ist, dass

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(z + \sqrt{z^2-1}\, \cos\theta \right)^n d\theta \; .$$

Zeige, dass diese Formel zu denselben $P_1(z)$ und $P_2(z)$ führt, die aus Gleichung (1) folgen.

(6 Punkte)