Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 32 (Aufgaben 32.1 - 32.4)

Abgabe am Di 10.11.2009 um 11 Uhr

Aufgabe 32.1 (Komplexe Multiplikation)

Betrachte die Abbildung $f_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto w{\cdot}z$, für $w \neq 0$ fest, von Aufgabe 30.4.

a) Zeige: f_w ist $\mathbb{C}$-linear.

b) Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Sei $w = a + ib$. Gib die reelle 2×2 Matrix $M(f_w)$ an, die f_w darstellt.

c) Für welche $w \in \mathbb{C}$ ist $M(f_w) \in \mathrm{SO}(2)$? (4 Punkte)

Aufgabe 32.2 (Geometrische Reihe)

a) Zeige mit Aufgabe 31.2, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{2^k} \ ,$$

für ein festes $\phi \in \mathbb{R}$, konvergiert und berechne den Grenzwert.

b) Benutze das Resultat, um zu zeigen, dass die reelle Reihe

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{2^k}$$

den Grenzwert $S = \frac{4-2\cos\phi}{5-4\cos\phi}$ hat.

c) Skizziere die 2π-periodische Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$; $\phi \mapsto f(\phi) = \frac{4-2\cos\phi}{5-4\cos\phi}$.
Bemerkung: Die Reihe S ist die Fourier-Reihe von f. (6 Punkte)

Aufgabe 32.3 (Trigonometrische Funktionen)

a) Betrachte $(a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$ und zeige:

$$b\cos\theta + a\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin\left[\theta + \tan^{-1}(b/a)\right] \ .$$

b) Benutze dieses Ergebnis, um mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$\frac{d^n}{dt^n}[e^{at}\sin bt] = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{at} \sin\left[bt + n\tan^{-1}(b/a)\right] \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 32.4 (Rekursionsrelation)

Mit zwei gegebenen Startzahlen S_1, S_2, sei eine unendliche Folge $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ nach folgender Regel gebildet: *jede neue Zahl ist das Zweifache der Differenz der beiden vorhergehenden Zahlen.* Ist zum Beispiel $S_1 = 1$ und $S_2 = 4$, so erhalten wir die Folge $1, 4, 6, 4, -4, -16, -24, \ldots$. Gesucht ist eine Formel für die n-te Zahl S_n.

a) Unsere Vorschrift zur Erzeugung der Folge kann wie folgt geschrieben werden $S_{n+2} = 2(S_{n+1} - S_n)$. Zeige, dass $S_n = z^n$ diese Rekursionsrelation löst, falls $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Benutze diese quadratische Formel, um $z = 1 \pm i$ zu erhalten und zeige, dass $S_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n$ für beliebige komplexe Zahlen A und B eine Lösung der Rekursionsrelation ist.

c) Zeige für reelle Lösungen: $B = \overline{A}$ und $S_n = 2\,\mathrm{Re}[A(1+i)^n]\,$.

d) Zeige für obiges Beispiel:

$A = -\frac{1}{2} - i$ und $S_n = 2^{n/2}\sqrt{5}\cos\left[\frac{(n+4)\pi}{4} + \arctan 2\right]$.

(Tipp: Polarkoordinaten!)

e) Prüfe nach, dass diese Formel zu $S_{34} = 262144$ führt und verifiziere dies mit Hilfe eines Rechners.

Bemerkung: Diese Methode kann auf jede Rekursionsrelation der Form $S_{n+2} = pS_{n+1} + qS_n$ angewendet werden.

(6 Punkte)