Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 31 (Aufgaben 31.1 - 31.2)

Abgabe am Di 3.11.2009 um 11 Uhr

Aufgabe 31.1 (Geometrie und komplexe Arithmetik)

a) Zeige geometrisch (mit Hilfe einer Skizze), dass

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \ , \quad \mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) \ , \quad \tan(\arg z) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} \ , \quad z\overline{z} = |z|^2 \, .$$

b) Zeige mit Hilfe des Produktes $(2+i)(3+i)$: $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$.

c) Beweise: Ist $z = e^{i\theta} \neq -1$, so folgt $(z-1) = (i \tan\frac{\theta}{2})(z+1)$;
(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

d) Zeige:

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = 2\cos\left(\tfrac{\theta-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \quad \text{und} \quad e^{i\theta} - e^{i\phi} = 2i\sin\left(\tfrac{\theta-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$$

(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

e) Ist c eine feste komplexe Zahl und R eine feste reelle Zahl, so erkläre mit einer Skizze, warum $|z-c| = R$ die Gleichung eines Kreises ist.

f) Genügt z der Gleichung $|z+3-4i| = 2$, so bestimme den minimalen und maximalen Wert von $|z|$ und die dazugehörige Position von z. (Tipp: Skizze!)

g) Sind a, b feste komplexe Zahlen, so zeige anhand eines Bildes, dass $|z-a| = |z-b|$ die Gleichung einer Geraden ist.

(14 Punkte)

Aufgabe 31.2 (Geometrische Reihe)

Die Summenformel der geometrischen Reihe für $z \in \mathbb{C}$ sei bekannt (s. Aufgabe 13.6);

$$1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} \, .$$

a) In welchem Bereich von $\mathbb{C}$ muß z liegen, damit die *unendliche* Reihe konvergiert?

b) Falls z in diesem Bereich liegt, gegen welchen Punkt in der Ebene konvergiert dann diese unendliche Reihe?

c) In der Vorlesung wurde die Konvergenz der exponentialen Reihe bildlich dargestellt. Zeichne analog ein möglichst genaues Bild der unendlich geometrischen Reihe für $z = \frac{1}{2}(1+i)$ und überprüfe, dass sie in der Tat gegen den in b) ermittelten Punkt konvergiert.

(6 Punkte)