Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 30 (Aufgaben 30.1 - 30.4)

Abgabe am Di 27.10.2009 um 11 Uhr

Aufgabe 30.1 (Greenscher Satz)

Berechne den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Hypozykloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eingeschlossen ist.

Hinweis: Benutze die Parametrisierung

$$x = a\cos^3\vartheta \quad , \quad y = a\sin^3\vartheta \quad , \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi \ .$$

[Lösung: $\frac{3}{8}\pi a^2$] (3 Punkte)

Aufgabe 30.2 (Stokesscher Satz)

Berechne mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Kurvenintegral

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz \ ;$$

C ist die Schnittkurve des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ mit der Ebene $x+y+z=1$, und die Orientierung entspricht der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn in der xy-Ebene.

Hinweis: Die Kurve C ist der Rand der Fläche S, die durch $z = 1-x-y = f(x,y)$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ definiert ist. Das Integral über D lässt sich mit Polarkoordinaten leicht berechnen.

[Die Lösung ($\frac{3}{2}\pi$) lässt sich überprüfen, indem C durch die Parametrisierung

$$x = \cos t \ , \quad y = \sin t \ , \quad z = 1 - \sin t - \cos t \ , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

beschrieben wird.] (3 Punkte)

Aufgabe 30.3 (Gaußscher Satz)

a) Sei $F = (2x\,,\, y^2\,,\, z^2)$ ein Vektorfeld aus $C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ und S die Oberfläche der Einheitskugel $x^2+y^2+z^2=1$. Berechne $\int_S \langle F\,,\, dS\rangle$.

   [Lösung: $\frac{8}{3}\pi$]

b) Berechne $\displaystyle\int_{\partial W} (x^2+y+z)\,dA$, wobei W die Kugel $x^2+y^2+z^2 \le 1$ ist.

   [Tipp: Um den Divergenzsatz anwenden zu können, müssen wir auf W ein Vektorfeld F mit $\langle F\,,\,\widehat{n}\rangle = x^2+y+z$ finden, wobei $\widehat{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor von ∂W ist.]

(6 Punkte)

Aufgabe 30.4 (Komplexe Zahlen)

a) Argumentiere, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto w \cdot z$ für $w \neq 0$ fest, auf der komplexen Zahlenebene geometrisch eine Drehung um den Winkel $\arg w$ zusammen mit einer Streckung um $|w|$ darstellt.

b) Zeige:

$$(1+i)^4 = -4 \quad , \quad (1+i)^{13} = -2^6(1+i) \quad , \quad (1+i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2} = -4i \quad , \quad \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2} = -\sqrt{2}e^{i(-\pi/12)} \ .$$

c) Zeige mit Eulers Formel:

i) $\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta \quad , \quad \sin 3\vartheta = -4\sin^3\vartheta + 3\sin\vartheta,$

ii) $\cos^4\vartheta = \frac{1}{8}(\cos 4\vartheta + 4\cos 2\vartheta + 3)$.

(8 Punkte)