Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Mathematik für Physiker
## WS 2008/09 Blatt 3 (Aufgaben 3.1 - 3.6)

Abgabe in den Übungen am 11.11.2008

---

**Aufgabe 3.1 (Abbildungen)**

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweise:

a) Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

c) Sind $f$ und $g$ bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

d) Drücke im bijektiven Fall die Umkehrabbildung von $g \circ f$ durch diejenigen von $f$ und $g$ aus.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.2 (Körperaxiome)**

a) Warum ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kein Körper?

b) Warum ist die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen kein Körper?

Liste jeweils auf, welche der Körperaxiome verletzt bzw. erfüllt sind.

(2 Punkte)

**Aufgabe 3.3 (Körperaxiome)**

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, seien $a, b, c, d \in K$ , $b \neq 0$ , $d \neq 0$ . Beweise folgende Aussagen und gib bei jedem Schritt an, welches Axiom bzw. welchen Satz benutzt wird:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

d) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{ad}{bc}$ (Hier sei auch $c \neq 0$) .

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.4 (Gleichungssysteme)**

a) Löse über $\mathbb{Q}$ (also suche Lösungen in $\mathbb{Q}$) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 2 \\ 2x + 5y &= 3 \,. \end{aligned}$$

b) Bestimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7.
Beispiel: $(4 \bmod 7) \cdot (5 \bmod 7) \equiv 20 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$.

c) Löse das folgende Kongruenzsystem, indem *dasselbe Verfahren* wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod 7 \,. \end{aligned}$$

d) Warum ist das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

nicht lösbar?

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.5 (Vollständige Induktion)**

Sei $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 1$ , $x_0 = 0$. Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

i) $x_n \leq x_{n+1}$

ii) $x_n \leq 2$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.6 (Negation)**

Gestalte die logische Verneinung folgender Behauptungen. (Man kann einfach: "Es ist nicht der Fall, dass ..." am Anfang des Satzes einfügen. Besser ist es, das Wort "nicht" soweit wie möglich hinten im Satz anzubringen oder es überhaupt zu vermeiden).

a) Für alle reelle Zahlen, die $a > b$ erfüllen, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a + \frac{1}{n} < b$.

b) Zwischen jedem Paar von verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine reelle Zahl.

c) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n}$ entweder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl.

d) Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, das $n > x$ erfüllt.

(2 Punkte)