Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 29 (Aufgaben 29.1 - 29.9)

Zusatzblatt: dient der Wiederholung und dem Selbststudium

Aufgabe 29.1 (Pauli-Matrizen)

Sei $\mathbb{1}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe dieser Matrizen läßt sich jede komplexe 2×2 Matrix $M \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$ in der Form $M = \frac{1}{2}\left(a_0 \mathbb{1}_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right)$, mit $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{C}$, darstellen.

a) Zeige, dass die Matrizen σ_a , $a = 1, 2, 3$, hermitesch sind.

b) Zeige: $(\sigma_a)^2 = \mathbb{1}_2$ für $a = 1, 2, 3$.

c) Weise nach, dass $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ gilt und berechne auch die Produkte $\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_2$, $\sigma_3\sigma_1$.

d) Nun zeige, dass $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1}_2 + i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c$, wobei ϵ_{abc} das schiefsymmetrische Levi-Civita Symbol und δ_{ab} das Kronecker-Delta ist. Die Matrizen $\{\pm\mathbb{1}_2, \pm i\sigma_a \ , \ a = 1, 2, 3\}$ stellen die Elemente von $\mathbb{H}$ (definiert in Aufgabe 9.10) dar.

e) Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Aufgabe 29.2 (Inverse Matrizen)

Invertiere folgende Matrizen durch die Berechnung der Determinanten und Adjunkten:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29.3 (Die Spur)

Zeige, dass für den K-Vektorraum $V := \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\to K \\ (A, B) &\mapsto \langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}\,(A^T B) \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ definiert.

Im Spezialfall $K = \mathbb{R}$ handelt es sich bei diesem Matrizenraum um einen euklidischen Vektorraum. Zeige: In diesem Raum stehen die symmetrischen Matrizen und die schiefsymmetrischen Matrizen senkrecht aufeinander; d.h. ist A eine symmetrische und B eine schiefsymmetrische Matrix, so gilt $\langle A, B\rangle = 0$.

Aufgabe 29.4 (Algebraisches Eigenwertproblem)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Basis $x_i,\ i = 1,2,3,4$. Sei $L\colon V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$x_1 \mapsto x_2 \quad , \quad x_2 \mapsto x_3 \quad , \quad x_3 \mapsto x_4 \quad , \quad x_4 \mapsto x_1 \ .$$

Bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von L.

Aufgabe 29.5 (Orthonormale Basen und Eigenvektoren)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine *reelle Struktur* auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ mit i) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall v \in V \ : \ \sigma(\alpha v) = \overline{\alpha} \cdot \sigma(v)$ und ii) σ ist eine *Involution*, d.h. $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$.

Für $\mathbb{C}^n$ ist die Komplexkonjugation $\sigma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, gegeben durch $\sigma(z) = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$, eine reelle Struktur. Sei $F \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ und w ein Eigenvektor von F zum Eigenwert $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Zeige:

a) $\overline{w}$ ist ein Eigenvektor von F zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

b) Die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w + \overline{w})$ und $v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(w - \overline{w}) \in \mathbb{C}^n$ liegen in $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. (Tipp: $\mathbb{R}^n$ ist der Unterraum von $\mathbb{C}^n$ invariant unter der Abbildung σ).

c) Die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ spannen den gleichen komplexen Unterraum U von $\mathbb{C}^n$ auf wie w und $\overline{w}$.

d) Ist $b \neq 0$, so bildet (v_1, v_2) eine Basis von U, bezüglich welcher $F|_U$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ hat. (Tipp: Beachte die Eigenwertgleichung für F und die Bilder der Basisvektoren).

e) Ist $b \neq 0$ und $(w, \overline{w})$ eine komplexe Orthonormalbasis von U, dann ist auch (v_1, v_2) eine.

Aufgabe 29.6 (Linienintegral)

Es sei ∂Q der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufende Rand des Quadrats $Q := [0,1] \times [0,1]$ in der (x,y)-Ebene. Berechne das Linienintegral (oder Wegintegral) längs der Kurve ∂Q des Vektorfeldes $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ; \ f(x,y) := (x^3 + xy^2 \ , \ x^2 y - y^5)$,

$$I_\gamma := \int_\gamma f \cdot dx \qquad \text{für} \qquad \gamma = \partial Q.$$

Nun berechne I_γ für $\gamma = \partial T$, den Rand des Dreiecks T zwischen den Punkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$, auch im Gegenuhrzeigersinn. Gib eine Erklärung der erhaltenen Resultate.

Aufgabe 29.7 (Flächeninhalt einer Fläche)

Betrachte den Parameterraum

$$D := \{(r, \vartheta \mid 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

einer Parametrisierung eines Kegels $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta) \mapsto (\ x = r\cos\vartheta \ , \ y = r\sin\vartheta \ , \ z = r\ ) \, .$$

Ist φ im Inneren von D injektiv? Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Kegels.

Aufgabe 29.8 (Koordinatentransformation)
Zeige: das Trägheitsmoment der Ellipse $D := \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ist gegeben durch

$$\Theta := \int_D (x^2 + y^2)\ dx\,dy = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)\,.$$

(Tip: In sinngemäßer Abwandlung von Polarkoordinaten verwende für D die Parameterdarstellung $(t, \phi) \mapsto (x := at\cos\phi\ ,\ y := bt\sin\phi)$).

Aufgabe 29.9 (Gaußintegral)
Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := e^{-x^2-y^2}$ auf den Bereichen

$$B_R := \left\{(x, y) \mid x, y \geq 0\ ,\ x^2 + y^2 \leq R^2\right\} \quad , \quad Q_R := [0, R] \times [0, R] \quad , \quad R \in \mathbb{R}\,.$$

a) Berechne

$$\int_{B_R} f\,d\mu := \int_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx\,dy\ .$$

(Tipp: Polarkoordinaten!)

b) Zeige:

$$\int_{Q_R} f\,d\mu := \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 .$$

und

$$\int_{B_R} f\,d\mu \leq \int_{Q_R} f\,d\mu \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} f\,d\mu$$

und benutze diese Ungleichungen, um das uneigentliche Integral der Gaußschen Funktion

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

zu berechnen.

c) Forme I durch die Substitution $x := t^{1/2}\ ,\ 0 \leq t < \infty$ um, um zu zeigen, dass

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt =: \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ .$$

Wir erhalten so den Wert der Gammafunktion (s. Aufgabe 28.4) $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$;

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \quad , \quad \alpha > 0\ ,$$

an der Stelle $\alpha{=}\frac{1}{2}$. Mit der Gammafunktion läßt sich z.B. das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ schön darstellen:

$$\Omega_n = \frac{\omega_n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}\ ,$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre ist.