Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 28 (Aufgaben 28.1 - 28.5)

Abgabe in den Übungen am 20.7.2009

Aufgabe 28.1 (Extrema unter Nebenbedingungen)

a) Bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) := x + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Berechne das maximale Volumen eines Quaders $V(x) = xyz$ mit einer Oberfläche $2(xy + xz + yz) = 10\,\mathrm{m}^2$.

c) Bestimme die Extremwerte von $f(x, y, z) = x + y + z$ unter den Bedingungen $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$.

(3 Punkte)

Aufgabe 28.2 (Implizite Funktionen)

Zeige: in der Nähe des Punktes $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ lassen sich die Gleichungen $xu + yvu^2 = 2$, $xu^3 + y^2v^4 = 2$ für u und v als Funktionen von x und y eindeutig lösen. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 28.3 (Koordinatentransfomation)

a) Zeige, dass die Divergenz eines Vektorfeldes $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten (Basis: (e_r, e_ϑ, e_z)) gegeben ist durch

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right\} ,$$

wobei $F = F_r e_r + F_\vartheta e_\vartheta + F_z e_z$.

b) Zeige, dass die zweidimensionale Laplace-Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in Polarkoordinaten (r, ϑ) folgende Form hat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 28.4 (Gammafunktion)

Die *Gammafunktion* $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wird für reelle $\alpha > 0$ definiert durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \ .$$

Zeige:

i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)\ ,\ \alpha > 0\ ,$

ii) $\Gamma(n+1) = n!\ ,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Das heißt, die Gammafunktion dehnt die zunächst nur auf $\mathbb{N}$ definierte Fakultätsfunktion $n \mapsto n!$ auf die reelle Halbgerade aus. (3 Punkte)

Aufgabe 28.5 (Mehrfache Integrale)

a) Berechne die iterierten Integrale (ab Teil v) ist $D := [0,1] \times [0,1]$)

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^1 (x^4 y + y^2)\, dy\, dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (y\cos x + 2)\, dy\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_1^2 (-x\ln y)\, dy\, dx$ iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x\ \sin y\, dx\, dy$

v) $\displaystyle\int_D (xy\, e^{x^2 y})\, dy\, dx$ vi) $\displaystyle\int_D (x^3 + y^2)\, dy\, dx$

vii) $\displaystyle\int_D y\, e^{xy}\ dy\, dx$ viii) $\displaystyle\int_D \ln\frac{x+1}{y+1}\, dy\, dx$

(4 Punkte)

b) i) Sei $D := \{(x,y) | 0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le (a^2 - x^2)^{1/2}\}$ der im ersten Quadranten gelegene Teil der Scheibe mit dem Radius a. Berechne

$$\int_D (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx \ .$$

ii) Berechne mit Hilfe von Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\ \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \,.$$

(4 Punkte)