Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 27 (Aufgaben 27.1 - 27.3)

Abgabe in den Übungen am 13.7.2009

Aufgabe 27.1 (Taylorpolynom)

a) Bestimme das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f\colon \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x,y>0\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \quad f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$$

um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)=(1,1)$. Gib die Form des Lagrange-Restgliedes an.

b) Zeige, dass die Taylorapproximation zweiter Ordnung im Punkt (1,1) der im positiven Quadranten $(0,\infty)\times(0,\infty)$ durch $g(x,y):=x^y$ definierten Funktion wie folgt lautet:

$$\mathcal{T}^2_{(1,1)}g(x,y) = 1+(x-1)+(x-1)(y-1)\ .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 27.2 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y):=x^n+y^n$; $n\geq 2$ in (0,0) eine kritische Stelle hat.

a) Argumentiere, dass für n gerade (0,0) ein isolierter Minimierer von f ist und für n ungerade keine lokale Extremstelle bei (0,0) vorliegt.

b) Bestimme für welche n die Hesse-Matrix in (0,0) positiv definit bzw. positiv semidefinit ist.

Merke: Es gibt Fälle, in denen die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist, aber kein lokales Minimum vorliegt. Außerdem gibt es Fälle, in denen ein Minimum vorliegt, in denen die Hesse-Matrix nicht positiv definit ist. (Die positive Definitheit ist ein hinreichendes Kriterium, kein notwendiges.) Schließlich zeigt dieses Beispiel, dass die Indefinitheit der Hesse-Matrix in einem Punkt zwar eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung dafür ist, dass dort keine lokale Extremstelle vorliegt.

(4 Punkte)

Aufgabe 27.3 (Kritische Punkte)

a) Finde die vier kritischen Punkte der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to f(x,y) := \left(4x^2+y^2\right) e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

und bestimme, ob diese lokale Maximierer oder Minimierer von f sind.

b) Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x, y < \frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}\ ; \quad f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

im einzigen kritischen Punkt im Definitionsbereich ein lokales Maximum hat.

c) Bestimme die kritischen Punkte des Affensattels $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ f(x,y) = 3x^2y - y^3$ (s. Aufgabe 24.2) und die Eigenwerte der Hesse-Matrix H_f in dem Punkt (x,y). Ist H_f positiv definit, indefinit oder negativ definit? Hat f an der Stelle $(0,0)$ ein Extremum?

d) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xyz$.

i) Finde die fünf kritischen Punkte von $f(x,y,z)$.

ii) Zeige, dass in $B_1(0)$, der offenen Kugel vom Radius 1 um 0, gilt: $f(x,y,z) \geq (|x|-|y|)^2 + z^2$. So ist der Nullpunkt ein lokales Minimum von f. Komme zum gleichen Ergebnis mit der Hesse-Matrix.

iii) Zeige, dass die von Null verschiedenen kritischen Punkte keine Extrema sind. (Da f invariant unter Permutationen der Variablen x, y, z ist, brauchen wir nur entsprechende Repräsentanten unter den kritischen Punkten zu betrachten.)

(10 Punkte)