Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 26 (Aufgaben 26.1 - 26.5)

Abgabe in den Übungen am 6.7.2009

Aufgabe 26.1 (Abstand)

Betrachte die Funktion $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x_1, \ldots, x_n) := \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Zeige, dass die Richtungsableitung $\nabla_v r(0)$ an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$ in der Richtung von irgend einem gewählten Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, unabhängig von v ist. Das heißt, vom Ursprung aus gesehen wächst der Abstand in allen Richtungen gleich schnell.

Was ist die Richtungsableitung $\nabla_v r(x)$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$?

Bestimme die partiellen Ableitungen von $r(x_1, \ldots, x_n)$, und finde Nährungswerte für die Zahlen

$$\alpha := \sqrt{3.04^2 + 3.96^2} \quad , \quad \beta := \sqrt{2.95^2 + 4.07^2}\ .$$

(Es liegt nahe, die lineare Approximation um den Punkt $(x, y) = (3, 4)$ zu betrachten.)

(4 Punkte)

Aufgabe 26.2 (Kettenregel)

Eine Ente schwimmt innerhalb des Kreises $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $x = \cos t$, $y = \sin t$, und die Temperatur des Wassers ist durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 e^y - xy^3$ gegeben. Bestimme die Temperaturänderung $\dfrac{df}{dt}$, die die Ente spürt.

a) mit Hilfe der Kettenregel $(f \circ c)'(t) = \langle\, \nabla f\,(c(t))\ ,\ c'(t)\,\rangle$,

b) in dem $f{\circ}c$ als Funktion von t geschrieben wird, und dann differenziert.

Verifiziere auf die gleiche Weise die Kettenregel in jedem der folgenden Fälle:

$a)$ $\quad f(x, y) = xy\ , \quad c(t) = \big(e^t\ , \cos t\big)$

$b)$ $\quad f(x, y) = e^{xy}\ , \quad c(t) = \big(3t^2\ , t^3\big)$

$c)$ $\quad f(x, y) = (x^2 + y^2)\log\sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad c(t) = \big(e^t\ , e^{-t}\big)$

$d)$ $\quad f(x, y) = xe^{x^2+y^2}\ , \quad c(t) = (t\ , -t)\ .$

(5 Punkte)

Aufgabe 26.3 (Kettenregel)

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $c(t)$ eine C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$. Zeige, mit $c(t) = (x(t)\,,\, y(t))$, durch zweimalige Anwendung der Kettenregel, dass

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t) = f_{xx}(\frac{dx}{dt})^2 + 2f_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + f_{yy}(\frac{dy}{dt})^2 + f_x\frac{d^2x}{dt^2} + f_y\frac{d^2y}{dt^2}\ ,$$

wobei $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ f_{xy} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ ,$ usw.

b) Beweise mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 26.4 (stetig partiell differenzierbar $\not\Leftarrow$ differenzierbar)

In der Vorlesung wurde die Stetigkeit der partiellen Ableitungen als hinreichend für die Differenzierbarkeit bewiesen. Sie ist allerdings *nicht* notwendig.

Betrachte

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x = y = 0\ . \end{cases} \end{array}$$

Zeige: f ist in $(0,0)$ differenzierbar, aber $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind in $(0,0)$ nicht stetig.

(3 Punkte)

Aufgabe 26.5 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$)

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (skalare Felder) und $F, G, H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (Vektorfelder), alle C^2-Funktionen. Zeige mit Hilfe von ϵ_{ijk} und δ_{ij}:

1) $\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \operatorname{rot} G + G \times \operatorname{rot} F$

2) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$

3) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$

4) $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

5) $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + \nabla f \times F$

6) $\operatorname{rot}(F \times G) = F \operatorname{div} G - G \operatorname{div} F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$

7) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \nabla^2 F$

8) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$

9) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0.$

(4 Punkte -1 für jede Fehler)