Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009   Blatt 25 (Aufgaben 25.1 - 25.4)

Abgabe in den Übungen am 29.6.2009

Aufgabe 25.1 (Differentiation in $\mathbb{R}^n$)

a) Was ist der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) := x^3y - xy^2$? Bestimme die Ableitung $df_c(h)$ der Funktion f an der Stelle $c \in \mathbb{R}^2$ in der Richtung von $h \in \mathbb{R}^2$ für (i) $c = (2,1)$, $h = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, (ii) $c = (-2,1)$, $h = (3/5, -4/5)$.

b) Finde den Gradienten der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
(i) $f(x,y,z) = \sin xy + \cos yz$, (ii) $f(x,y,z) = xe^{yz}$.
Finde alle gemischt partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$.

c) Bestimme die Jacobi-Matrizen der Vektorfelder:
(i) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $F(x,y,z) = (x \sin y \ , \ z \cos y)$,
(ii) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F(x,y,z) = (xe^{yz} \ , \ ye^{xz} \ , \ ze^{xy})$
(iii) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F(x,y,z) = (y/(x^2+y^2) \ , \ -x/(x^2+y^2) \ , \ z)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

d) Seien x und y Funktionen von u und v, d.h. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, und sei $f(x,y)$ ein skalares Feld. Finde $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)$ für folgende Funktionen:
(i) $f(x,y) = x^2 + xy$, $x = ve^u$, $y = ue^v$
(ii) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$, $x = 4uv$, $y = u - v$.
(Nehme an, dass $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$.)

e) Sei $f(x,y)$ ein skalares Feld auf $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $(x = r\cos\vartheta, \ y = r \sin\vartheta)$. Zeige: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} u_\vartheta$, wobei $u_r = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \in \mathbb{R}^2$ und $u_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) \in \mathbb{R}^2$. Tipp: Drücke erst $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ mittels $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ aus und dann löse für $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ bezüglich $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 25.2 (partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ differenzierbar)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeige:

a) Die Funktion f ist in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt!) partiell differenzierbar.

b) In $(0,0)$ ist f nicht stetig. (Tipp: Betrachte $f \circ c$ mit $c\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto (t^2, t) \in \mathbb{R}^2$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 25.3 (Gravitationspotential)

Betrachte das Newton'sche Gravitationspotential

$$\begin{array}{rcl} V:\ \mathbb{R}^3\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & V(x) := -\dfrac{\alpha}{r(x)}\ , \quad \alpha := GmM > 0\,, \quad r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,, \end{array}$$

erzeugt durch eine im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ befindliche Masse M, die auf eine Masse m in $x \in \mathbb{R}^3$ einwirkt, wobei G die Gravitationskonstante ist.

a) Bestimme die Niveauflächen von V.

b) Berechne die Gravitationskraft $F = -\operatorname{grad} V$ und begründe kurz, dass ihre Richtung in jedem Punkt senkrecht zur Niveaufläche von V steht.

c) Zeige, dass die Funktion $V(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ die Laplace-Gleichung $\Delta V := \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0$ erfüllt.

(3 Punkte)

Aufgabe 25.4 (Wellengleichung)

Sei $\varphi(x,t)$ eine C^2-Funktion zweier Variablen und $x = \zeta + \eta$, $t = \frac{1}{c}(\zeta - \eta)$, $c \in \mathbb{R}$.
Zeige:

a) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\zeta} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$,

b) $\varphi(x,y) = f(x-ct) + g(x+ct)$, für beliebige Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, erfüllt die zweidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ .$$

Nun sei $\varphi : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x,t) \mapsto \varphi(x,t)$ eine C^2-Funktion von 3+1 Variablen $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$, und $a \in \mathbb{R}^3$, $\|a\| = 1$, ein Einheitsvektor. Zeige, dass die Funktion $\varphi(x,y) = f(a\cdot x - t) + g(a\cdot x + t)$, für beliebige $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung $\varphi_{tt} = c^2\Delta\varphi$ liefert. Hier ist $c > 0$ eine Konstante und $\Delta := \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ bezeichnet den Laplace–Operator auf $\mathbb{R}^3$. Warum nennt man diese Lösungen *ebene Wellen*?

(5 Punkte)