Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 24 (Aufgaben 24.1 - 24.4)

Abgabe in den Übungen am 22.6.2009

Aufgabe 24.1 (Niveaumengen)

Zeichne die Niveaulinien $M_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = c\} \subset \mathbb{R}^2$ für die folgenden Funktionen und die angegebenen Funktionswerte:

a) $f(x,y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c = 1, 2, 3, 4.$

Zeichne die Graphen von $z = f(x,y)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 24.2 (Affensattel)

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = 3x^2y - y^3$.

a) Berechne $\operatorname{grad} f(x,y) := (f_x, f_y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Rechne nach, dass $f(r\cos\varphi\, ,\, r\sin\varphi) = r^3 \sin 3\varphi$ für alle $r, \varphi \in \mathbb{R}$ gilt.
Folgere daraus, dass $f \circ D = f$ gilt, wobei D die Drehung um $120° = 2\pi/3$ bezeichne.
(Tipp: Zeige $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi$; betrachte dazu entweder den Imaginärteil von $e^{3i\varphi}$ oder benutze die Additionstheoreme.)

c) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt.
Wie sieht der Graph der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t\cos\varphi\, ,\, t\sin\varphi) \in \mathbb{R}$ aus?
(Unterscheide verschiedene Fälle je nach dem Vorzeichen von $\sin 3\varphi$.)

d) Betrachte nun die Niveaumengen

$$N_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$$

für $c \in \mathbb{R}$. Zeichne N_0. Skizziere außerdem (nur qualitativ) einige andere der Mengen N_c, und zwar in blau für $c > 0$ und in rot für $c < 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 24.3 (Vertauschung von partiellen Ableitungen)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Berechne

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)\ .$$

Wann kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen?

(2 Punkte)

Aufgabe 24.4 (Parametrisierte Kurve)
Sei B die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt (0,0). Der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ und Mittelpunkt $(\frac{3}{4}, 0)$ werde in B wie ein Rad auf dem Rand von B entlanggerollt, so dass $m(t) := \frac{3}{4}(\cos t, \sin t)$ der Mittelpunkt zum Zeitpunkt $t \in [0, 2\pi]$ ist. Die Bahn $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die der am Anfang auf (1,0) liegende Punkt dabei durchläuft, ist eine spezielle *Hypozykloide*, nämlich die *Astroide*. Skizziere diese!

a) Betrachte den Vektor $v(t) := c(t) - m(t)$. Zeige, dass $v(t)$ mit dem Vektor $(\cos t, \sin t)$ den Winkel $4t$ bildet, und daher $v(t) = \frac{1}{4}\left(\cos(t-4t), \sin(t-4t)\right)$ ist.

b) Folgere durch Umformen, dass $c(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

c) Für welche $t \in [0, 2\pi]$ gilt $c'(t) = 0$?

d) Zeige, dass die Bogenlänge $L(c)$ der Astroide $c\colon [0, 2\pi] \ni t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \in \mathbb{R}^2$ 6 ist.

e) Berechne den von $c|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ mit der x- und der y-Achse eingeschlossenen Flächeninhalt.

   Betrachte dazu dieses Kurvenstück als Graph einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(\cos^3 t) = \sin^3 t$ gilt. Das Integral von $f(x)$ läßt sich mit Hilfe der Substitution $x = u(t) = \cos^3 t$ ausrechnen. Folgere, dass die Astroide insgesamt eine Fläche mit dem Flächeninhalt $\frac{3}{8}\pi$ umschließt. (Tipp: Formel aus Aufgabe 17.5).

(10 Punkte)