Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 23 (Aufgaben 23.1 - 23.4)

Abgabe in den Übungen am 15.6.2009

Aufgabe 23.1 (Fourier-Reihen)

Finde die Fourier-Reihen der stückweise glatten Funktionen $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

a) $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ x(\pi - x) & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

b) $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{für } 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \text{für } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

c) $$f(x) := |x| \quad \text{für} \quad -\pi \le x \le \pi$$

d) $$f(x) := x^2 \quad \text{für} \quad -\pi \le x \le \pi\ .$$

[Lösungen:

a) $$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^2} \cos 2nx + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^3} \sin(2n+1)x$$

b) $$f(x) = \frac{\pi}{8} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)^2} \cos(4n+2)x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$$

c) $$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \right)$$

d) $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx \right)$$].

(8 Punkte)

Aufgabe 23.2 (Fourier-Reihe und Parseval-Gleichung)

Finde die Fourier-Reihe der 2π–periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $[0, 2\pi)$ folgendermaßen definiert ist:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{für } x = 0\ . \end{cases}$$

Zeige mit Hilfe der Parseval–Gleichung Eulers Formel: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (4 Punkte)

Aufgabe 23.3 (Faltung)

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige, 2π–periodische Funktionen. Wir definieren die **Faltung** von f mit g durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,dy \ .$$

Zeige:

i) Kommutativität: $\quad f * g = g * f$

ii) Bilinearität: $\quad f * (g + h) = f * g + f * h \quad , \quad (f + g) * h = f * h + g * h \ .$

Sei $\widehat{f}(n)$ der n-te Fourier-Koeffizient von $f(x)$, d.h. $\widehat{f}(n) := \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$. Die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt die Fouriertransformierte von f. Zeige: $\quad f * e^{inx} = \widehat{f}(n)e^{inx}$.

Schließe daraus, und aus i) und ii), dass die Faltung einer 2π–periodischen Funktion f mit einem trigonometrischen Polynom $P := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ wieder ein trigonometrisches Polynom ist, d.h.

$$f * P = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) c_n e^{inx} \ .$$

Zeige, dass

$$\widehat{f * P}(n) = \widehat{f}(n)c_n = \widehat{f}(n)\widehat{P}(n) \ .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 23.4 (Offene Kugel)

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ die offene Kugel um a vom Radius r. Bestimme für jedes $x \in B_r(a)$ einen Radius $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subset B_r(a)$. Es folgt, dass $B_r(a)$ offen ist.

(Hinweise: Anhand einer Skizze für $n = 2$ ist leicht abzulesen, was der Abstand ρ zwischen einem festen $x \in B_r(a)$ und dem Rand von $B_r(a)$ sein soll. Für dieses ρ ist zu zeigen, dass $B_\rho(x) \subset B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$ gilt, also ein beliebiges Element z aus $B_\rho(x)$ auch in $B_r(a)$ enthalten ist.)

(3 Punkte)