Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 22 (Aufgaben 22.1 - 22.4)

Abgabe in den Übungen am 8.6.2009

Aufgabe 22.1 (Drehung und spezielle orthogonale Matrix)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass A orthogonal ist, und dass A eine Drehung ist, d.h. $\det A{=}1$ oder $A{\in}\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Betrachte A als Matrix in $\mathrm{Mat}(3\times 3,\mathbb{C})$ und bestimme die Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Was sind die Beträge $|\lambda_i|$? Bestimme die Drehachse, d.h. den Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Bestimme die normierten Eigenvektoren aus $\mathbb{C}^3$ und die komplexe Diagonalform $\widehat{A} = X^\dagger A X \ , \ X \in \mathrm{U}(3)$. Nun ersetze die beiden komplexen Spalten von X durch deren normierte Real- und Imaginärteile, um eine Matrix $Y \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ zu erhalten. (Falls notwendig muss die letzte (reelle) Spalte von X durch ihr Negatives ersezt werden, damit Y eine Drehung ist, d.h. eine orthogonale Abbildung mit Determinante 1). Zeige, dass

$$\widetilde{A} := Y^T A Y == \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Warum stellt A eine Drehung um 315 Grad um die Drehachse dar?

(5 Punkte)

Aufgabe 22.2 (Fourier-Reihen)

Finde die Fourier-Reihen der stückweise glatten Funktionen $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

a) $$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi \end{cases}$$

b) $$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } x = \pm\pi \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Setze $x = \pi/2$ in beide Reihen ein, um eine Reihe für π von Leibniz zu erhalten.

(4 Punkte)

$$\left[\text{Lösungen : a) } f(x) = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx\right) \qquad \text{b) } f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x\right)\right]$$

Aufgabe 22.3 (Hauptachsentransformation)

Die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \quad (1)$$

beschreibt eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, die wir bestimmen wollen. Schreibe zunächst die Gleichung in Matrizenschreibweise für die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Vektors in $\mathbb{R}^3$,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{3} c_i x_i - 3 = 0 \ ,$$

wobei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $c \in \mathbb{R}^3$ ein gewisser Vektor ist. Finde die Eigenwerte und eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A. (Benutze eventuell das Orthnormalisierungsverfahren.) In dieser Basis hat A die Diagonalgestalt $\widehat{A} = B^T AB$, wobei $B \in \mathrm{SO}(3)$ die Modalmatrix der orthonormalen Eigenvektoren von A ist. Zeige, dass Gleichung (1) in den transformierten Koordinaten $y_i = \sum_j (B^T)_{ij} x_j$ die Form $-(y_1 - \sqrt{3})^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$ annimmt. So können wir neue Koordinaten, die *Hauptachsen* z_1, z_2, z_3, definieren, in denen diese Gleichung die Normalform für einen elliptischen Kegel $-\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ annimmt. Genauer gesagt handelt es sich hier um einen Kreiskegel.

(5 Punkte)

Aufgabe 22.4 (Bogenlängen)

a) **Parabelbogen**

Zeige, dass die Länge eines Parabelbogens $f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ der Spannweite $2a$ und der lichten Höhe h

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx = \sqrt{a^2 + 4h^2} + \frac{a^2}{4h}\operatorname{arsinh}\frac{2h}{a}$$

ist. (Substitution: $\frac{2hx}{a^2} := \sinh t$).

b) **Kettenlinie**

Betrachte die Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}\, ;\ y(x) = \cosh x\, ,\ a \le x \le b$.

Die Kettenlinie $y(x)$ ist die Gleichgewichtsfigur einer Kette (als unendlich dünne, schwere, nicht dehnbare Linie idealisiert), die in den Punkten $(a, \cosh a)$ und $(b, \cosh b)$ aufgehängt ist, so dass die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse wirkt. Berechne die Bogenlänge dieser Kettenlinie.

c) **Die Beschreibung des rollenden Rades**

Wir nennen die Kurve $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$Z(t) := r \cdot (\omega t + \sin(\omega t)\ ,\ 1 - \cos(\omega t))\ ,\ r = 1\ ,\ \omega = \mathrm{const.}$$

Rollkurve oder Zykloide. Sie beschreibt die Bewegung eines Punktes auf dem Rand eines auf der x-Achse mit der Geschwindigkeit $r\omega$ rollenden Rades. Gib zu jedem Zeitpunkt t die Weglänge an, die dieser Punkt zurückgelegt hat, d.h. berechne die euklidische Bogenlänge der Rollkurve bis zum Zeitpunkt t. (Tipp: Verwende das bekannte Additionstheorem $1 + \cos\alpha = 2(\cos\frac{\alpha}{2})^2$ und den Satz des Pythagoras.)

(6 Punkte)