Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 21 (Aufgaben 21.1 - 21.5)

Abgabe um 13:10 (vor der Vorlesung) am 3.6.2009

Aufgabe 21.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen (vgl. Aufg. 12.2)

$$-f'' = \lambda f \ ,$$

mit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, kann auch als Eigenwertgleichung für den Endomorphismus $Lf := -f''$ verstanden werden. Prüfe nach, dass L symmetrisch ist bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^a f(x)g(x)\,dx$, wobei L ein Endomorphismus auf

$$V := \big\{ f\colon [0,a] \to \mathbb{R} \mid f'(0) = f'(a) = 0,\ f \text{ glatt auf } [0,a] \big\}$$

ist und $f, g \in V$. Für welche $A, B \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist $f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$ eine Eigenfunktion von $L \in \mathrm{End}(V)$? Bestimme die zugehörigen Eigenwerte und normalisiere die Eigenfunktionen bezüglich $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 21.2 (Der Satz von Cayley–Hamilton)

a) Verifiziere den Satz von Cayley–Hamilton für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Benutze diesen Satz um A^{-1} und A^5 zu berechnen.

b) Zeige, dass $B \in \mathrm{Mat}(2\times 2, K)$ die Gleichung $B^2 = \mathrm{Tr}\,(B)B - \det(B)\mathbb{1}_2$ erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe 21.3 (Die Cramer'sche Regel)

Löse mit der Cramerschen Regel die linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 21.4 (Diagonalisierbarkeit)

In der Vorlesung wurde gezeigt: Zu jeder unitären Matrix $A \in U(n)$ existiert eine unitäre Transformationsmatrix $U \in U(n)$ derart, dass $\widehat{A} := U^\dagger A U$ eine Diagonalmatrix ist. Ferner haben die Diagonalelemente von $\widehat{A}$ sämtlich den Betrag 1.

a) Zeige, dass die Drehung in $\mathbb{R}^2$, dargestellt durch

$$D := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in SO(2) \subset U(2)$$

sich im Reellen nicht diagonalisieren läßt. Finde eine komplexe unitäre Transformationsmatrix $U \in U(2)$, mit welcher $\widehat{D} := U^\dagger D U = \begin{pmatrix} \exp i\vartheta & 0 \\ 0 & \exp -i\vartheta \end{pmatrix}$.

b) Eine Drehspiegelung in $\mathbb{R}^2$ wird durch

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in O(2) \quad , \quad a^2 + b^2 = 1,$$

gegeben. (Merke: $\det A = -1$.) Zeige, dass eine reelle Drehung $B \in SO(2)$ existiert, damit $\widehat{A} := B^T A B$ eine reelle Diagonalmatrix ist. Argumentiere: Bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems ist die Drehspiegelung A bloß eine Spiegelung an einer Koordinatenachse.

(4 Punkte)

Aufgabe 21.5 (Binomische Formeln)

Es seien $A, B, \mathbb{1} \in \mathrm{Mat}(n \times n\, ,\, K)$, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist.

a) Berechne: $(A+B)^3$, $(\mathbb{1}+B)^3$. (Klammern auflösen und dabei beachten, dass im allgemeinen $AB \neq BA$)

b) Zeige, dass für alle $k > 0$ und **kommutierende** Matrizen A, B mit $A^0 := \mathbb{1}$ die folgenden Formeln gelten:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \qquad\qquad A^k - B^K = (A-B) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B^j$$

(Vergleiche Aufgabe 8.4)

c) Berechne C^5 mit Hilfe von b) für $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)