Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 20 (Aufgaben 20.1 - 20.2)

Abgabe in den Übungen am 25.5.2009

Aufgabe 20.1 (Algebraische Eigenwertprobleme)

a) Finde die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrizen

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad G := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad H := \begin{pmatrix} 3 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Prüfe nach, dass H hermitesch ist, und dass die Eigenvektoren von H orthogonal sind.

(6 Punkte)

b) Finde die Eigenvektoren der Matrix

$$K := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass nur zwei davon linear unabhängig sind. (2 Punkte)

c) Zeige, dass eine hermitesche Matrix $H \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$ zwei verschiedene Eigenwerte haben muss, es sei denn, dass sie ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

(2 Punkte)

d) Diagonalisiere

$$L := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad M := \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

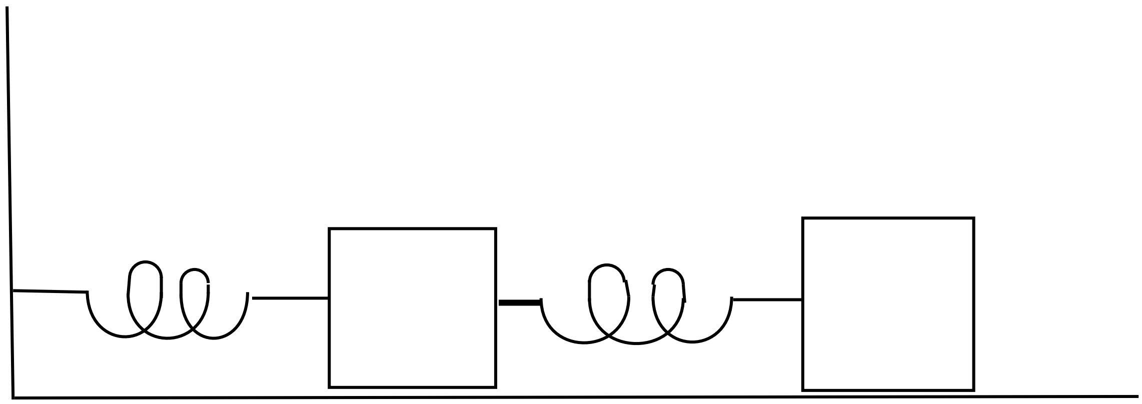
und berechne L^3, M^{100}, N^5. (3 Punkte)

e) Finde eine unitäre Matrix, die die hermitesche Matrix $P := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisiert.

(2 Punkte)

Aufgabe 20.2 (Eigenwerte)

Betrachte die geradlinige Bewegung von zwei gleichen Massen, die untereinander und mit einer starren Wand durch Federn verbunden sind und sich ohne Einwirkung anderer Kräfte horizontal reibungslos bewegen können.



Die Massen seien beide gleich 1, die Federkonstanten seien 3 und 2. Ferner seien u_1 und u_2 die horizontalen Abweichungen der beiden Massen von der Ruhelage. Die Regeln der Mechanik ergeben, dass die Bewegungen des Systems durch die Lösungen des folgenden Systems von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden:

$$u_1'' = -5u_1 + 2u_2$$
$$u_2'' = 2u_1 - 2u_2$$

i) Zeige: Der Lösungsansatz

$$u_1 = x_1 \cos \omega t \quad , \quad u_2 = x_2 \cos \omega t$$

führt auf ein homogenes System von 2 linearen Gleichungen für die zwei Unbekannten x_1, x_2, welches als Parameter die noch zu bestimmende Eigenfrequenz ω enthält.

ii) Bestimme die ω, für die dieses System eine nichttriviale Lösung hat.

iii) Bestimme die Lösungen für u_1 und u_2.

iv) Führe die analogen Überlegungen durch für $u_i = x_i \sin \omega t$.

v) Beweise, dass alle Linearkombinationen der so erhaltenen Lösungen des Differentialgleichungssystems wieder Lösungen sind.
(Bemerkung: man kann zeigen, dass man damit alle Lösungen erhält. Das Beispiel zeigt, wie Schwingungsprobleme auf das Eigenwertproblem führen: die ω^2 sind *Eigenwerte*).

(5 Punkte)