Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.4)

Abgabe in den Übungen am 4.11.2008

Aufgabe 2.1 (Axiomatischer Umgang mit Ungleichungen)

Ziel der Aufgabe ist, die Rechenregeln für Ungleichungen mit *rationalen Zahlen* auf die Rechenregeln für Ungleichungen mit *ganzen Zahlen* zurückzuführen. Dazu müssen wir zuerst definieren, wann eine rationale Zahl positiv ist.

DEFINITION: Wir sagen, dass die rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ positiv ist, wenn gilt: $0 < a \cdot b$.

Setze die folgende Behauptung für *ganzen Zahlen* voraus und zeige damit:

a) Wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ positive rationale Zahlen sind, so auch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ sowie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Als nächstes müssen wir definieren, wann eine rationale Zahl größer ist als eine andere.

DEFINITION: Für $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ sagen wir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ wenn gilt: $0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

Nun setze voraus, dass a) bewiesen ist und zeige für $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$:

b) $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} < \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$ sowie $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$,

und falls zusätzlich noch $0 < \frac{m}{n}$ gilt, so gilt auch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

Bemerkung: Da ganze Zahlen a, b auch rationale Zahlen mit Nenner 1 sind, muß bei den beiden Definitionen überlegt werden, dass sie bei Anwendung auf rationale Zahlen mit Nenner 1 mit den als bekannt vorausgesetzten Eigenschaften der ganzen Zahlen übereinstimmen. Das ist nicht Teil der Aufgabenstellung (4 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Approximation von Wurzeln mit rationalen Zahlen)

Betrachte den folgenden Algorithmus zur beliebig genauen Bestimmung von $\sqrt{3}$:

Es sei $x_1 := 3$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass für jedes n gilt: $\frac{3}{x_n} < \sqrt{3} < x_n$.

b) Begründe, dass sich die Fehlerschranke $x_n - \frac{3}{x_n}$ in jedem Schritt mindestens halbiert.

c) Bestimme x_2, x_3, x_4 und rechne nach, dass bereits $x_4 - \frac{3}{x_4}$ kleiner als 10^{-3} ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Vollständige Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_1(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, $S_2(n)$ die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, usw.
Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle n gelten:

$$\begin{aligned} S_1(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ S_3(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \ . \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Komposition von Funktionen)

Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_i : \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} &\rightarrow \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \\ x &\mapsto F_i(x) \quad , \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

definiert durch

$$F_1 := 1 - x \quad , \quad F_2 := \frac{1}{x} \ .$$

Wir bezeichnen die Komposition von Funktionen F, G als $F \circ G : x \mapsto F(G(x))$.

a) Zeige, dass $F_1 \circ F_1 = F_2 \circ F_2 = \mathrm{id}$, die identische Abbildung.

b) Berechne $G_1 := F_1 \circ F_2$, $G_2 := F_2 \circ F_1$, $F_3 := G_1 \circ F_1$.
Merke, dass $F_1 \circ F_2 \neq F_2 \circ F_1$; d.h. die Komposition von F_1 and F_2 nicht *kommutativ* ist.

c) Zeige, dass $F_1 \circ G_1 = F_2$, $F_1 \circ G_2 = F_3$, $G_2 \circ F_1 = F_2$, $F_1 \circ F_3 = G_2$, $F_3 \circ F_1 = G_1$.

d) Betrachte die Menge der Abbildungen $M := \{\mathrm{id}, F_1, F_2, F_3, G_1, G_2\}$.
Zeige, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_{F_i} : M &\rightarrow M \quad , \quad i = 1,2 \\ H &\mapsto L_{F_i}(H) := F_i \circ H \end{aligned}$$

bijektiv sind.

(7 Punkte)