Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 19 (Aufgaben 19.1 - 19.4)

Abgabe in den Übungen am 18.5.2009

Aufgabe 19.1 (Determinanten)

a) Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} , \quad B := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} , \quad C := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} ,$$

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} , \quad E := \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} , \quad F := \begin{vmatrix} 2 & x & z \\ x & 2 & y \\ z & y & 2 \end{vmatrix} .$$

Überlege in jedem Fall, ob eine Berechnung oder ein Argument schneller zum Ergebnis führt als die Anwendung der Entwicklungsformel von Laplace (z. B. durch Überführung in eine Dreiecksmatrix).

b) Zeige:

$$G := \begin{vmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

$$H := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz \ .$$

(8 Punkte)

Aufgabe 19.2 (Orthonormalsystem)

Sei V der unitäre Vektorraum aller auf $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ stetigen komplexen Funktionen mit dem hermiteschen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Zeige, dass die Funktionen $\varphi_n(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \in V$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, orthonormal sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 19.3 (Adjungierte Matrix)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass das Adjungierte von A bezüglich des hermiteschen Skalarprodukts

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto g(v, w) := v^T \cdot B \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist. (3 Punkte)

Aufgabe 19.4 (Orthogonale Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $C := \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Benutze diese Eigenschaft, um das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$x + 2y + 2z = 3 \quad , \quad 2x + y - 2z = 6 \quad , \quad -2x + 2y - z = -3$$

b) Zeige, dass die Matrix $E := \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$ orthogonal ist und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass eine Spiegelung der kartesischen Koordinaten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ an der (x, y)-Ebene eine orthogonale Transformation mit der Determinante -1 ist.

(6 Punkte)