Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 18 (Aufgaben 18.1 - 18.5)

Abgabe in den Übungen am 11.5.2009

Aufgabe 18.1 (Orthonormalisierung von Polynomfunktionen)

Sei V der euklidische Vektorraum aller Polynomfunktionen $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ vom Grade≤ 3 mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

a) Bestimme die Matrix des Skalarprodukts (Gram'sche Matrix) bezüglich der Basis $A := \{f_0 = 1\,,\ f_1 = x\,,\ f_2 = x^2\,,\ f_3 = x^3\}$. Zeige, dass diese Matrix symmetrisch ist.

b) Benutze das Orthonormalisierungsverfahren, um aus der Basis A eine orthonormale Basis $B := \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ zu bilden. Was ist die Gram'sche Matrix bezüglich der Basis B? Entwickele die Polynomfunktion $F(x) = 3x^2 - 2$ nach der Basis B; also bestimme die Koordinaten von $F(x)$ bezüglich der Basis B.

c) Definiere den Abstand zwischen zwei Vektoren in V durch $d(f,g) := \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g\,,\ f - g\rangle}$. Zeige:
$$d\left(x^3\,,\ x^2\right) = \sqrt{\frac{28}{35}}\ .$$

d) Normieren wir die Basisvektoren in B so um, dass die Bedingungen $P_n(1) = 1$ erfüllt sind, erhalten wir die ersten vier *Legendre-Polynome*. Sie sind gegeben durch die Formel von Rodrigues $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Prüfe nach, dass P_0, P_1, P_2, P_3 die Legendre-Differentialgleichung erfüllen:
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 18.2 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$)

Bezeichne das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ durch $u \cdot v := \langle u\,,\ v\rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, u_i\, v_j$ und das Vektorprodukt durch $u \times v = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k$. Zeige mit Hilfe von ϵ_{ijk} und δ_{ij} , dass für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

i) $\langle w\,,\ (u \times v)\rangle = \langle v\,,\ (w \times u)\rangle = \langle u\,,\ (v \times w)\rangle$

ii) $u \times (v \times w) = \langle u\,,\ w\rangle v - \langle u\,,\ v\rangle w$

iii) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0 \quad (\text{Jacobi} - \text{Identität}).$

(3 Punkte)

Aufgabe 18.3 (Adjungierte Matrix)

a) Sei $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ selbstadjungiert und positiv definit, so dass B ein Skalarprodukt g auf $\mathbb{C}^n$ definiert:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto g(v, w) := v^T \cdot \overline{B} \cdot \overline{w} \, . \end{aligned}$$

Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ ein Endomorphismus und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ die dazugehörige Matrix. Zeige, dass die Matrix des Adjungierten von L bezüglich g durch die Matrix $B^{-1}A^\dagger B$ gegeben ist. (Hinweis: für $B^\dagger = B$ gilt $(B^{-1})^\dagger = B^{-1}$).

b) Sei $B = \begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$. Zeige, dass B ein hermitesches Skalarprodukt g auf $\mathbb{C}^2$ definiert. Bestimme das Adjungierte bezüglich g von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 18.4 (Unitäre Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unitär ist, falls gilt:
$\overline{a} = \frac{d}{D}$, $\overline{b} = -\frac{c}{D}$, $\overline{c} = -\frac{b}{D}$, $\overline{d} = \frac{a}{D}$, wobei $D := ad - bc$.

b) Zeige, dass die Matrix

$$F := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

unitär ist und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass das Produkt zweier unitärer Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ wieder eine unitäre Matrix ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 18.5 (Matrizen)

a) Eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ wird *obere Dreiecksmatrix* genannt, wenn für alle i, j mit $i > j$ gilt: $a_{ij} = 0$. Zeige: Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix.

b) Zeige, dass jede invertierbare obere Dreiecksmatrix durch elementare Zeilenumformungen in $\mathbb{1}_n$ überführt werden kann.

c) Beweise, dass für alle $X \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ und $Y \in \mathrm{Mat}(m \times l; K)$ gilt:

$$(X \cdot Y)^T = Y^T \cdot X^T.$$

(3 Punkte)