Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 17 (Aufgaben 17.1 - 17.5)

Abgabe in den Übungen am 4.5.2009

Aufgabe 17.1 (Skalarprodukt und Norm)

a) Sei $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\|v\|^2 := \langle v \, , \, v \rangle$.
Zeige, für alle $v, w \in V$ die Parallelogrammidentität:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + \|w\|^2$$

und die Polarisierungsidentität:

$$4\langle v \, , \, w \rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \ .$$

Ausblick: Gilt die Parallelogrammidentität für eine Norm $\|v\|$, so definiert die Polarisierungsformel ein Skalarprodukt.

b) Beweise die verschärfte Dreiecksungleichung

$$\big| \, \|x\| - \|y\| \, \big| \ \leq \|x \pm y\| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

c) Es seien a, b, c, d vier Punkte in $\mathbb{R}^n$. Wir setzen
$l_1 := \|a-b\| \ , \ l_2 := \|b-c\| \ , \ l_3 := \|c-d\| \ , \ l_4 := \|d-a\| \ ,$
außerdem $d_1 := \|a-c\| \ , \ d_2 := \|b-d\|$. Beweise die Vierecksungleichung:

$$| \, l_1 - l_3 \, | \leq d_1 + d_2 \ .$$

(Tipps: für $n = 2$ skizzieren; die verschärfte Dreiecksungleichung in a) zweimal anwenden)

(5 Punkte)

Aufgabe 17.2 (Orthonormalität)

a) Prüfe nach, dass $B = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1) \, , \, \frac{1}{2}(-1,1,-1,1) \, , \, \frac{1}{2}(1,-1,-1,1) \, , \, \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts bildet. Zeige, dass der Vektor $v{=}(3,4,-8,12) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $v{=}\frac{1}{2}(11,21,19,3)$ hat.

b) Benutze das Orthonormalisierungsverfahren, um aus den Vektoren $c_1{=}(4,2,-2,-1)$, $c_2{=}(2,2,-4,-5)$, $c_3{=}(0,8,-2,-5)$ in $\mathbb{R}^4$ das Orthonormalsystem bezüglich des Standardskalarprodukts $C = \{\frac{1}{5}(4,2,-2,-1) \, , \, \frac{1}{\sqrt{24}}(-2,0,-2,-4) \, , \, \frac{1}{\sqrt{44}}(-2,6,2,0)\}$ zu erhalten.

(3 Punkte)

Aufgabe 17.3 (Orthonormalisierung)

a) Warum ist die Abbildung $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$\langle P\,,\,Q\rangle := 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]\,,$$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_2[X]$?

b) Benutze das Orthonormalisierungsverfahren, um aus der Basis $\{v_1{=}1\,,\ v_2{=}X\,,\ v_3{=}X^2\}$ eine orthonormale Basis zu bilden.

c) Definiere einen Abstand $d(P,Q)$ zwischen zwei Polynomen in $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ und berechne $d\,(X^2 - X + 1\ ,\ X^2)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 17.4 (Norm)

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Maximumnorm* durch $\|x\|_* := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

a) Zeige, dass $\|x\|_*$ eine Norm ist, die Axiome einer Norm also erfüllt sind.

b) Was ist der *Einheitsball* $\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|x\|_* < 1\}$? Skizziere ihn für $n = 2$.

c) Zeige, dass gilt: $\|x\|_* \le \|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_*$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
(Tipp: Vergleiche $\|x\|_*^2$ mit $\|x\|^2$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 17.5 (Integrationsregeln)

a) Zeige mit Hilfe der Substitutionsregel: $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx\ ,\ n \in \mathbb{N}$.

b) Berechne zunächst I_0, I_1. Beweise mit Hilfe partieller Integration die Rekursionsformel:
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{für } n \ge 2\ .$$
Folgere, dass für $k \ge 1$,
$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{(2k-1)}{2k} \quad \text{für } k \text{ gerade} \\ I_{2k+1} &= 1 \cdot \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{(2k)}{2k+1} \quad \text{für } k \text{ ungerade,} \end{aligned}$$
und somit gilt:
$$\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \frac{2}{\pi}\prod_{n=1}^{k}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\ . \tag{1}$$
Nun, folgere aus $\cos^{2k} x \ge \cos^{2k+1} x \ge \cos^{2k+2} x\ ,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (skizziere zusätzlich $\cos^n x\ ,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ für $n = 0, 1, 2$), dass $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$. Aus (1) folgt dann die Wallissche Produktdarstellung für π:
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\ .$$

(4 Punkte)