Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 2009 Blatt 16 (Aufgaben 16.1 - 16.4)

Abgabe in den Übungen am 27.4.2009

Aufgabe 16.1 (Integration)

Zeige, dass

a) $H = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\, dx = \tfrac{1}{3} \ln\left((x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} \ + \ \text{const.}$

(Partialbruchzerlegung und integration einer logarithmische Ableitung).

b) $I = \displaystyle\int \frac{4x^5}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx \ = \ 2x^2 - \frac{2}{x^2-1} + 4\ln|x^2-1| \ + \ \text{const.}$

(Polynomdivision mit Rest und Partialbruchzerlegung).

c) $J = \displaystyle\int e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)\right) \ + \ \text{const.},$

$\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (zweimal hintereinander partiell integriere).

Nun berechne einfacher: $\int e^{(\alpha + i\beta)t} dt$ und trenne Real- und Imaginärteile.

d) $K = \displaystyle\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ + \ \text{const.}$ (Substitution: $\tan \frac{t}{2} := \tau$).

(6 Punkte)

Aufgabe 16.2 (Gerade/Ungerade Funktionen)

Die Funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ gilt, und *ungerade* falls dagegen $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ ist, wie z.B. cosinus und sinus.

a) Beweise: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade (bzw. ungerade), so ist $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade (bzw. gerade).

b) Sei $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige durch Substitution:

i) Ist f gerade, so ist $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.

ii) Ist f ungerade, so ist $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe 16.3 (Hyperbelfunktionen)

Die Funktionen *sinus hyperbolicus*, $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und *cosinus hyperbolicus*, $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, werden definiert durch

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ .$$

a) Skizziere die Graphen der beiden Funktionen.

b) Gib eine Potenzreihenentwicklung für eine der beiden Funktionen an.

c) Zeige: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

d) Zeige, dass sowohl sinh als auch cosh der Differentialgleichung $f'' = f$ genügt.

e) Begründe, dass sinh streng monoton wachsend ist, und folgere daraus, dass eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu sinh gibt.

f) Beweise: $\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.
Tip: Setze $e^x = \sinh x + \cosh x$ *in c) ein.*

g) Berechne: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. (*Tip: Substituiere x durch* $\sinh t$ *und benutze c) und f))*.

(7 Punkte)

Aufgabe 16.4 (Ein Taylorfeind)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ gegeben.

a) Zeige mit Hilfe von $(0 \leq x \ \Rightarrow\ (1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x)$ die Ungleichungen

$$0 \leq f(x) \leq n^n x^{2n} \quad , \quad |f'(x)| \leq 2n^n \cdot |x|^{2n-3}.$$

b) Berechne f' und f'' für $x = 0$ (mit den Ungleichungen in a) für $n = 1$ bzw. $n = 3$ und der Differenzierbarkeitsdefinition).

c) Zeige, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $R_k(x) = P_k(x) \cdot x^{-3k}$ mit $P_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gibt, für die $f^{(k)}(x) = R_k(x) \exp(-1/x^2)$ für alle $x \neq 0$ gilt. (Induktionsbeweis)

d) Zeige, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ Konstanten K_k gibt, so dass

$$\forall x \in [-1, 1] \backslash \{0\} : \ |f^{(k)}(x)| \leq K_k \cdot x^2 \ ,$$

also $f^{(k+1)}(0) = 0$ nach der Differenzierbarkeitsdefinition. Wie sehen die Taylorpolynome an der Stelle x=0 aus? Haben sie überhaupt etwas mit der Funktion f zu tun?

(4 Punkte)