Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
SoSe 20009 Blatt 15 (Aufgaben 15.1 - 15.6)

Abgabe in den Übungen am 20.4.2009

Aufgabe 15.1 (Nicht alle Funktionen sind differenzierbar)

a) Zeige, dass $\varphi(x) = |x|^3$ in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar ist (was sind die Ableitungen?), aber an der Stelle $x = 0$ nur zweimal (nicht dreimal) differenzierbar ist.

b) Zeige, dass die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^3$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für} \quad x < 0 \ , \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ **nicht** differenzierbar ist.

(Betrachte die Ableitung als Grenzwert von $\frac{\varphi(x_n)-\varphi(0)}{x_n}$ für $x_n = \pm\frac{1}{n}$).

(3 Punkte)

Aufgabe 15.2 (Hauptsatz)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeige, dass f streng monoton wächst. (Tip: Hauptsatz auf f' anwenden.)

b) Bestimme: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Tip: Verwende das Resultat von Aufgabe 13.2 b).)

(3 Punkte)

Aufgabe 15.3 (Integrationsregeln)

Berechne gegebenfalls mit Hilfe der Substitutionsregel und partieller Integration:

$$I_1 := \int_0^2 x \exp(x^2)\ dx \quad , \quad I_2 := \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\ dx \quad , \quad I_3 := \int_0^\pi e^{\sin x} \cos x\ dx \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 15.4 (Inverse Matrizen)

Berechne die Inverse A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} zu den 3×3–Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3/5 & -20/65 & 48/65 \\ 4/5 & 15/65 & -36/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 15.5 (N-te Wurzeln von Eins)

Betrachte die Polynome in $\mathbb{C}_N[Z]$, $P_N(Z) := Z^N - 1\ ,\ Z \in \mathbb{C}\, ,\ N \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen in $\mathbb{C}$ nennt man die **N-ten Wurzeln von Eins**. Benutze die Polardarstellung der komplexen Zahlen, um diese zu bestimmen. Markiere auf einer Skizze der $\mathbb{C}$-Ebene die 5. und 6. Wurzeln von Eins. Zeige, dass diese geometrisch durch ein einbeschriebenes (bzw. umschriebenes) reguläres Polygon in (bzw. um) den Einheitskreis gefunden werden können.

Argumentiere nun, dass es eine Intervallschachtelung gibt, um den Kreisumfang zu bestimmen. Im wesentlichen hat Archimedes auf dieser Weise eine Approximation von π errechnet. (3 Punkte)

Aufgabe 15.6 (Basiswechsel)

Betrachte die folgenden Basen des Polynomvektorraums $\mathbb{Q}_3[X]$:

$$i)\quad A := \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\} \qquad ii)\quad B := \left\{1\ ,\ 1+X\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3\right\}\ .$$

Drücke die Basiselemente $v_k = X^{k-1}\ ,\ k = 1,\ldots,4$, von A als Linearkombinationen von den Basiselementen $w_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}\ ,\ k = 1,\ldots,4$, von B aus, d.h. schreibe

$$v_j = \sum_{i=1}^{4} w_i\, t_{ij}\ ,\quad t_{ij} \in \mathbb{Q}\, .$$

Die Matrix $T = (t_{ij}) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels von A nach B. Umgekehrt liefert

$$w_j = \sum_{i=1}^{4} v_i\, u_{ij}\ ,\quad u_{ij} \in \mathbb{Q}$$

die Transformationsmatrix $U = (u_{ij}) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ des Basiswechsels von B nach A.

Finde die Matrizen T und U und zeige: $U = T^{-1}$.

Betrachte die Matrixdarstellungen $M_A(L), M_B(L) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ der Abbildung $L = \mathrm{diff}$ aus Aufgabe 11.4 bezüglich der Basen A bzw. B. Zeige:

$$M_B(L) = T M_A(L) T^{-1}\ ,$$

und somit, dass $M_A(L)$ und $M_B(L)$ ähnlich sind.

(Beachte: die Basen sollen so geordnet sein, dass beide T und U, genauso wie $M_A(L)$ und $M_B(L)$, obere Dreiecksmatrizen sind).

(5 Punkte)