Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 14 (Aufgaben 14.1 - 14.6)

Aufgabe 14.1 (Lineare Gleichungssysteme)

Prüfe nach, ob $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar sind, und gegebenenfalls invertiere. Bestimme die Lösungsmengen in $\mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssysteme

$$A \cdot x \;:=\; \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot x \;:=\; \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Was sind die Dimensionen der Lösungsräume? Was ist der Rang von A und B? Finde gegebenenfalls (wenn $\neq \{0\}$) den Kern von A und B.

Aufgabe 14.2 (Komplexe Zahlen)

a) Zerlege

$$z := \left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4 \quad , \quad w := \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i+1}}}$$

in Real- und Imaginärteile. (Natürlich darf für Ausdrücke wie $(a-ib)^n$ die binomische Formel angewandt werden).

b) Bringe die folgenden als Produkt von Linearfaktoren gegebenen Polynome auf die Gestalt $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

i) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$

ii) $(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iii) $(x + 1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iv) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})) \cdot (x+1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$.

Aufgabe 14.3 (Exponentialfunktion)

a) In der Vorlesung haben wir die Reihen für die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Cosinusfunktion behandelt. Schreibe sie auf und zeige damit für alle $x \in \mathbb{R}$ die ***Formel von Euler und de Moivre*** $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

b) Aus a) und der Formel $\exp(x+a) = \exp(x) \cdot \exp(a)$ folgere

   i) die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus (s. Aufgabe 12.2).

   ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und somit, dass $\exp(ix)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1; z \in \mathbb{C}\}$ ist.

   iii) $\exp(ix + i2\pi) = \exp(ix)$.

c) *Polarkoordinatendarstellung.* Zeige, dass sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig in der Form $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellen läßt.

Aufgabe 14.4 (Darstellende Matrix)

Definiere die Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Begründe, dass $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ bildet. Warum ist L eine lineare Abbildung? Gib die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von A zur Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Gib die Bilder der Standardbasisvektoren unter L an. Was ist die darstellende Matrix für L bezüglich der Standardbasis. Was ist der Rang von L?

Aufgabe 14.5 (Lineare Unabhängigkeit und Dimensionsformel)

Sei V ein K-Vektorraum und $u, v \in V$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) $\dim(\mathrm{span}(\{u, v\}) = 2$

b) Es gibt eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathrm{span}(\{u, v\}) \to K^2$$

mit $\varphi(u) = (1, 0)$ und $\varphi(v) = (0, 1)$

c) Die Vektoren u, v sind linear unabhängig .

(Hinweis: Zeige a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), so entfällt die Notwendigkeit z.B. c) $\Rightarrow$ a) zu beweisen).

Aufgabe 14.6 (Stetigkeit)

a) Zeige, dass $g(x) := \sqrt[3]{x}$ stetig bei $x = 0$ ist.

b) Zeige, dass $g(x) := \sqrt[3]{x}$ stetig bei $x = c \neq 0$ ist.

c) Zeige, dass $f(x) := x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(Hinweis: die Identität $x^3 - c^3 = (x - c)(x^2 + xc + c^2)$ ist hilfreich für b) und c)).