Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 13 (Aufgaben 13.1 - 13.6)

Abgabe in den Übungen am 3.2.2009

Aufgabe 13.1 (Kettenregel und Umkehrfunktionen)

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $y \mapsto g(y)$ dreimal differenzierbar, und es gelte $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (also, g(f(x)) = x , f(g(y))=y). Gib $(g'(y), g''(y), g'''(y))$ in Abhängigkeit von $(f'(x), f''(x), f'''(x))$ mit $x = g(y)$ an.

b) Seien $f(x) = x^4$ und $g(y) = \sqrt[4]{y}$.
Berechne g', g'' einerseits mit der Kettenregel, andererseits mit a).
(*Die Ableitung der Wurzelfunktion ist bekannt(!) und es ist* $\sqrt[4]{} = \sqrt{\sqrt{}}$.)

c) Sei $f = \cos$ und $a \in [\frac{1}{10}, 1]$. Gib das Taylorpolynom dritten Grades der Umkehrfunktion an der Stelle $A := \cos(a)$ an.

(3 Punkte)

Aufgabe 13.2 (Umkehrfunktionen)

a) Bestimme jeweils den Wertebereich und die Umkehrfunktion von $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und $g : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad , \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 .$$

b) Begründe, dass die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ eine Umkehrfunktion ($\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) besitzt.
Finde die Ableitung: $\arcsin'(x)$ für $x \in (-1, 1)$.

c) In der Vorlesung haben wir gesehen:
exp wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} .$$

Nun beweise: die Logarithmusfunktion ln wächst schwächer als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad \text{für jedes } a > 0 .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 13.3 (Folgen von Sehnensteigungen)

Sei $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei f eine auf (α, ω) differenzierbare Funktion und $a \in (\alpha, \omega)$.

Zeige zunächst: Es gibt eine Zahl $n_a \in \mathbb{N}$ so dass für $n \geq n_a$ gilt $a+r_n \in (\alpha, \omega)$.

Zeige für diese $n \geq n_a$, dass die Folge der Sehnensteigungen der Sehnen durch $(a, f(a))$ und $(a + r_n, f(a + r_n))$ gegen die Ableitung $f'(a)$ von f im Punkt a konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a + r_n) - f(a)}{r_n} = f'(a) \; .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 13.4 (Rang von Matrizen)

Betrachte:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme jeweils den Rang der Matrizen A, B, AB und BA.

b) Was ist die Dimension der Lösungsräume der folgenden Gleichungen ($x \in \mathbb{Q}^3$):

$$Ax = 0 \quad , \quad Bx = 0 \quad , \quad ABx = 0 \quad , \quad BAx = 0 \; ?$$

(3 Punkte)

Aufgabe 13.5 (Gauß-Elimination)

a) Finde die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0 \; . \end{aligned}$$

b) Unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens invertiere die Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+\alpha & 10 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix} .$$

Stelle dir das α aus D als Messfehler vor, und vermeide deshalb, durch α zu dividieren. Für welche α versagt das Verfahren? Berechne den Rang von D für solche α.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.6 (Komplexe Zahlen II)

In Aufgabe 11.6 wurde aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper gemacht. Wenn wir genau dasselbe mit $\mathbb{R}^2$ machen, bekommen wir einen anderen Körper, nämlich die ***Komplexen Zahlen***, bezeichnet mit $\mathbb{C}$. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann definieren wir die zu z ***komplex konjugierte*** Zahl durch $\bar{z} := a - bi$ und die ***Norm*** von z durch $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$–linear ist.

b) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, dass $|zw| = |z|\ |w|$.

c) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $|z + w| \leq |z| + |w|$
(Mache eine schöne Zeichnung dazu; Dreiecksungleichung!).

d) Geometrische Reihe: Sei $z \in \mathbb{C}$, zeige

$$(1 - z) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1} \ ,$$

dass also die gleiche Formel wie für reelle Zahlen gilt.

(3 Punkte)