Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 12 (Aufgaben 12.1 - 12.7)

Abgabe in den Übungen am 27.1.2009

Aufgabe 12.1 (Intervallschachtelung)

Betrachte die durch

$$a_1 := 2\ , \quad b_1 := 4\ , \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}\ , \quad b_{n+1} := \frac{2a_{n+1}b_n}{a_{n+1}+b_n}\ .$$

definierten Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$.
Zeige durch Induktion, dass durch $\{[a_n\ , \ b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist.
Mit Rechnerhilfe berechne einige Intervalle, um daraus den Grenzwert zu erraten ($[a_{10}, b_{10}]$ ergibt eine Zahl, die bis auf die 4. Dezimalstelle richtig ist).

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2 (Additionstheorem und Eindeutigkeitssatz)

Bekanntlich löst die Sinusfunktion die Differentialgleichung

$$f'' + f = 0\ . \tag{1}$$

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f eine Lösung von (1) ist, so nennen wir $f(0)$ und $f'(0)$ ihre Anfangswerte.

a) Zeige, dass für jede Lösung der Gleichung (1) auch folgendes gilt:
Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$E[f(t)] := f'(t)^2 + f(t)^2 = c\ .$$

(Diese Gleichung ist der Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}(f')^2$ entspricht der kinetischen und $\frac{1}{2}(f)^2$ der potentiellen Energie eines harmonischen Pendels.)

b) Seien g und h zwei Lösungen der Differentialgleichung (1).
Zeige mit Hilfe von a), dass g und h schon dann gleich sind, wenn ihre Anfangswerte übereinstimmen. (Betrachte die Differenz $d(t) := g(t) - h(t)$ und $E[d(t)]$, um zu zeigen, dass $d(t) = 0\ \forall t$.)

c) Beweise mit Hilfe von b) die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\forall x, a \in \mathbb{R}: \qquad \sin(a+x) = \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x) \tag{2}$$

$$\cos(a+x) = \cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x) \tag{3}$$

(Weise nach, dass beide Seiten von (2) die Gleichung (1) erfüllen und dieselben Anfangswerte haben; aus $g(x) = h(x)$ folgt dann auch $g'(x) = h'(x)$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 12.3 (Taylorapproximation)

Finde das Taylorpolynom 2. Grades bei $x = 0$ der Fermi-Energieverteilungsfunktion:

$$f(x) := \frac{1}{\exp(x) + 1} \quad , \quad x \geq 0\,.$$

Wie groß ist die prozentuale Abweichung des Taylorpolynoms von der exakten Funktion bei x=1? (2 Punkte)

Aufgabe 12.4 (Produktformeln fürs Differenzieren)

a) Seien f, g n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige für $k \leq n$ die Formel

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)\ .$$

(Hinweis: Induktion über k).

b) Zeige für $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbar, dass

$$(f_1 \cdots f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdots f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \cdots f_n(x)\ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 12.5 (Konvergente Reihe und Teleskopsumme)

a) Die Folge der Partialsummen $s_n := \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert. Zeige, dass der Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ist. (Hinweis: zerlege $\frac{1}{k(k+1)}$ in Partialbrüche um s_n als Teleskopsumme zu schreiben).

b) Auf ähnliche Weise berechne den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.6 (Geometrische Reihe)

a) Stelle den periodischen Dezimalbruch $2,312312312312312\ldots$ als rationale Zahl $\frac{p}{q}$ dar.

b) Welchen Wert hat die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$? (2 Punkte)

Aufgabe 12.7 (Konvergenz)

Entscheide, ob die folgende Folge rationaler Zahlen konvergiert und bestimme gegebenfalls den Grenzwert:

$$\left\{ \frac{n^2 + 7n + 2}{3n^2 + 8n + 7} \right\}_{n \in \mathbb{N}}\ .$$

(2 Punkte)