Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 11 (Aufgaben 11.1 - 11.6)

Abgabe in den Übungen am 20.1.2009

Aufgabe 11.1 (Geometrische Reihe und Archimedes Axiom)

a) Benutze die Summenformel der geometrischen Reihe (s. Aufgabe 7.1), um für alle $0 \leq x < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $(n+1)x^n \leq 1/(1-x)$ zu beweisen. Verbessere diese (indem $\sqrt{x}$ anstatt x geschrieben wird) zu:

$$x^n \leq \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2(n+1)^2} \ .$$

b) Zeige mit a), dass es für jedes q, $0 < q < 1$, eine Konstante $K_q > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [-q, q]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| \leq \frac{K_q}{n} \ .$$

Bestimme K_q (natürlich unabhängig von x, n).

Ist $\{a_n\}$ mit $a_n := \dfrac{1}{1-q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ und $q \in (-1, 1)$ eine Nullfolge? (4 Punkte)

Aufgabe 11.2 (Die Wurzelfunktion)

a) Betrachte für $x > 0$ und $j = 1, 2, 3, \ldots$ die folgenden rekursiv definierten Funktionenfolgen:

$$f_j := \frac{x}{g_j(x)}, \qquad g_{j+1}(x) := \frac{g_j(x) + f_j(x)}{2}, \qquad g_1(x) := \frac{1+x}{2} \ .$$

(Also, $f_1(x) = \frac{2x}{1+x}$, $g_2(x) = \frac{4x+(1+x)^2}{4(1+x)}$, $\ldots$). Zeige, dass für jedes feste $x > 0$ durch $\{[f_k(x)\,,\, g_k(x)]\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist.

b) Zeige, dass $f_k(x)^2 \leq x \leq g_k(x)^2$ für alle k und $x > 0$ gilt, also eine Intervallschachtelung für die Wurzelfunktion gegeben ist.

(Vergleiche die Diskussion zur $\sqrt{2}$ zu Beginn des Semesters.) (4 Punkte)

Aufgabe 11.3 (Nicht alle Funktionen sind rational)

Zeige, dass es *keine* rationalen Funktionen $f(x) = P(x)/Q(x)$, $g(x) = R(x)/S(x)$ (außer $f = 0$ oder $g = 0$) gibt, so dass gilt: $f''(x) = -f(x)$ bzw. $g'(x) = g(x)$.
Tip: Die Grade der beteiligten Polynome vergleichen. (2 Punkte)

Aufgabe 11.4 (Darstellende Matrizen und Heisenberg-Vertauschungsrelation)
Betrachte die in Aufgabe 10.1 erhaltene Matrix $M(L)$, die die Differenziationsabbildung bezüglich der Basis $(1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k)$ darstellt.

a) Durch Matrixmultiplikation, finde für $k = 4$, die Matrizen: $M(L)^2, M(L)^3, M(L)^4$, $M(L)^5$. Prüfe nach, dass sie die Verkettungen $L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$ darstellen.

   Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (oder auch Zeilenvektoren!). Beachte, dass die Dimension der Kerne dieser Abbildungsmatrizen gleich (k+1 − Rang(M)) ist.

b) Es läßt sich leicht eine Matrixdarstellung $M(L_k) \in \mathrm{Mat}(k{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} L_k := \mathrm{diff}: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k-1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

   bezüglich der gleichen Basis für $\mathbb{Q}_k[X]$ schreiben. Nun finde bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix $M(N_k) \in \mathrm{Mat}(k{+}2{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der linearen Abbildung: "multipliziere mit X":

$$\begin{array}{rrcl} N_k: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k+1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & X \cdot P(X)\ . \end{array}$$

c) Multipliziere: $M(N_2){\cdot}M(L_3)$ und $M(L_4){\cdot}M(N_3)$. Interpretiere die Gleichung

$$M(L_4){\cdot}M(N_3) - M(N_2){\cdot}M(L_3) = \mathbb{I}_4$$

   für die zugehörigen Abbildungsverkettungen.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.5 (Komposition von zwei linearen Abbildungen)
Betrachte folgende lineare Abbildungen:

$$\begin{array}{rrcl} A: & \mathbb{Q}_3[X] & \to & \mathbb{Q}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rrcl} B: & \mathbb{Q}_2[X] & \to & \mathbb{Q}_3[X] \\ & Q(X) & \mapsto & (X-1)Q(X) \end{array}$$

a) Bestimme den Kern (wo?) und das Bild (auch wo?) von $A{\circ}B$.

b) Bestimme den Kern und das Bild von $B{\circ}A$.

c) Bestimme $V = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \quad | \quad (B \circ A)(P) = P\}$ und zeige, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}_3[X]$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 11.6 (Komplexe Zahlen)

Wir haben schon gesehen wie aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper wird, in dem $P(x) = x^2 - 2$ zwei Nullstellen hat (Aufgabe 5.4). Wichtiger ist, den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ so zu einen Körper K zu machen, dass auch $Q(x) = x^2 + 1$ zwei Nullstellen hat:
Da wir die Addition in $\mathbb{Q}^2$ schon haben, muß nur noch die Multiplikation definiert werden. Dazu soll das Element $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$ als neutrales Element 1_K bezeichnet werden, und als Multiplikation mit den Elementen $(q, 0) = q \cdot 1_K$ soll die Skalarmultiplikation in $\mathbb{Q}^2$ weiterverwendet werden, also $(q, 0) \cdot (u, v) := (q \cdot u\ ,\ q \cdot v)$.
Damit sind die Vektorraumeigenschaften ausgenutzt, und es fehlt nur noch die Definition von $(0, 1) \cdot (0, 1)$. Dies soll Nullstelle von $Q(x) = x^2 + 1$ werden. Wir definieren daher:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) := (-1, 0) = -1_K\,, \qquad \text{kurz: } i := (0, 1)$$

Oder ausführlicher: $(a \cdot 1_K + b \cdot i) \cdot (c \cdot 1_K + d \cdot i) = (ac - bd) \cdot 1_K + (ad + bc) \cdot i\,.$

Zeige die Gültigkeit aller auf die Multiplikation bezogenen Körperaxiome, nämlich:

a) 1_K ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

b) Die Multiplikation ist kommutativ sowie assoziativ.

c) Das Distributivgesetz gilt.

d) $\frac{a}{a^2+b^2} \cdot 1_K - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$ ist multiplikatives Inverses von $(a, b) = a \cdot 1_K + b \cdot i\,.$

(3 Punkte)