Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 10 (Aufgaben 10.1 - 10.4)

Abgabe in den Übungen am 13.1.2009

Aufgabe 10.1 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen)

a) Betrachte den Polynomvektorraum $\mathbb{Q}_k[X]$. Sei

$$\begin{array}{rccc} L := \text{diff} : & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_k[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

die lineare Abbildung: "ableiten". Was sind die Kerne und die Bilduntervektorräume (einfacher: Bilder) von L, $L^2{:=}L{\circ}L$, L^k, L^{k+1} ?

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich lineare Abbildungen $L : V \to W$ für beliebige (endlichdimensionale) Vektorräume durch Matrizen beschreiben lassen.

Für $V = W = \mathbb{Q}_k[X]$ finde die darstellenden Matrizen der Differentiationsabbildung $L :=$ diff bezüglich der Basen

a) $\left\{1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k\right\}$, *b)* $\left\{1\ ,\ 1+X\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\ ,\ \ldots\ ,\ \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}X^i\right\}$.

b) Betrachte die Drehung um den Winkel α im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn):

$$\begin{array}{rccc} D_\alpha : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{pmatrix} \end{array} .$$

Zeige, dass D_α eine lineare Abbildung ist. Was ist die darstellende Matrix von D_α und von $D_\beta{\circ}D_\alpha$? Zeige unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Additionstheoreme, dass $D_\beta{\circ}D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$ gilt.

Damit haben wir eine geometrische Deutung der Additionstheoreme: Eine Drehung um die Summe zweier Winkel ist dasselbe wie die Hintereinanderausführung zweier einzelner Drehungen!

(5 Punkte)

Aufgabe 10.2 (Matrixmultiplikation)

Sei

$$M_2(\mathbb{R}) := \text{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller 2-mal-2 Matrizen mit Komponenten in $\mathbb{R}$. Ferner sei Matrixmultiplikation $*$ definiert durch

$$\begin{aligned} *\colon M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Verknüpfung $*$ assoziativ aber nicht kommutativ ist.

b) Zeige, dass die Matrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $*$ ist. Wir nennen eine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ die inverse Matrix zu A, falls die Matrix-Gleichungen $A*B = B*A = \mathbb{1}$ erfüllt sind. (Wir schreiben dann $B = A^{-1}$).
Zeige, dass die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse hat.

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ gegeben, so dass $ad - bc \neq 0$. Finde $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so dass die Matrix-Gleichung $A*B = \mathbb{1}$ erfüllt wird. Zeige, dass dann $B*A = \mathbb{1}$ auch erfüllt ist. $B = A^{-1}$ ist also die inverse Matrix zu A. *(Hinweis: Es sind 4 algebraische Gleichungen für die 4 Unbekannten e, f, g, h zu lösen.)*

d) Definiere die *Determinante* einer Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ durch

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc .$$

Zeige, dass die Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren) von A linear abhängig sind, falls $\det(A) = 0$. Zeige, dass für alle $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ gilt: $\det(A*B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 10.3 (Konvergenz)

a) Welche der folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen?

a) $a_n := \frac{1}{2n}$	b) $a_n := n^2$
c) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$	d) $a_n := \frac{1}{10} + \frac{1}{n}$
e) $a_n := (-1)^n$	f) $a_n := P(\frac{1}{n}) - 1$ mit $P(x) := 1 + x^2 + 2x^3$.

b) Benutze die Definition von Konvergenz einer Folge, um zu zeigen, dass

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2+1} = 0$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{2n+5} = \frac{3}{2}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3}} = 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 10.4 (Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt)

Fibonacci (1170–1250) hat die Zahlenfolge eingeführt, die rekursiv durch

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{für } n > 1$$

definiert ist, und zwar um das Wachstum einer Kaninchenbevölkerung zu beschreiben.

a) Zeige induktiv, dass die Ungleichungen $a_n \leq a_{n+1} \leq 2a_n$ gelten.

b) Mit der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachte die Folge $\{B_n\} := \{A^n\}$. Es bezeichne $(B_n)_{ij}$ das ij–te Matrixelement von B_n. Zeige durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = (B_n)_{11}$.

c) Betrachte die Folge $\{c_n\}$ der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen ($c_n := a_{n+1}/a_n$). Übersetze die Rekursionsgleichung der a_n in eine Rekursionsgleichung für die c_n. Nehme zunächst an, dass die Folge $\{c_n\}$ konvergiert.
Benutze nun die erhaltene Rekursionsformel, um zu zeigen, dass deren Grenzwert $\alpha = (\sqrt{5} + 1)/2$ ist. Die Zahl α heißt der *Goldene Schnitt* und erscheint auch in zahlreichen anderen Zusammenhängen.

d) Nun zeige, dass die Folge $\{c_n\}$ konvergiert.
Hinweis: Zeige dazu erst mit der in c) erhaltenen Rekursionsformel und der Gleichung $(\sqrt{5} - 1)/2 = 2/(\sqrt{5} + 1)$, dass

$$\left| c_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| = \left| \frac{1}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} \right| < \frac{2}{3} \left| c_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| .$$

(5 Punkte)