Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Mathematik für Physiker
## WS 2008/09 Blatt 1 (Aufgaben 1.1 - 1.4)

Abgabe in den Übungen am 28.10.2008

---

**Aufgabe 1.1 (Mengen)**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? (Begründung)

a) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

b) Für alle Mengen $A$ gilt: $\emptyset \in A$.

c) Für alle Mengen $A$ gilt: $\emptyset \subset A$.

d) Für alle Mengen $A, B, C$ gilt: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

e) Für alle Mengen $A, B$ gilt: $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

f) Es gibt Mengen $A, B$, für die gilt: $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 1.2 (Rationale Zahlen und Ungleichungen)**

Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

(Hinweis: Um zu zeigen, dass $x \leq y$ gilt, ist es oft einfacher zu zeigen, dass $0 \leq y - x$ gilt. Dies ist so, weil man zeigen kann, dass eine Zahl $0 \leq z$ erfüllt, indem man eine Zahl $w \in \mathbb{R}$ mit $z = w^2$ vorgibt.)

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.3 (Beispiele zu "viel kleiner")**

Bestimme eine Zahl $r$, für die aus $0 < |x| \leq r$ stets

$$x^2 \text{ ist höchstens } 3\% \text{ von } |x|$$

folgt. Wieviel Prozent von $|x|$ ist $|x|^3$ höchstens, und wieviel Prozent von $|x|^2$ ist $|x|^4$ höchstens (*unter derselben Voraussetzung* $0 < |x| \leq r$ )?

Gib zu jeder Prozentzahl $p$ eine Zahl $r(p)$ an, so dass aus $0 < |x| \leq r(p)$ folgt:

$$x^2 \text{ ist höchstens } p\,\% \text{ von } |x|.$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 1.4 (Approximation von Wurzeln mit rationalen Zahlen)**
In der Vorlesung wurde $\sqrt{2}$ approximiert. Jetzt soll $2+\sqrt{5}$ approximiert werden.

a) Zeige die Identität
$$2+\sqrt{5} = 4 + \frac{1}{2+\sqrt{5}}\ .$$

b) Zeige, dass $2 < \sqrt{5} < 3$ und folgere aus dieser *groben* Ungleichung die *viel bessere*
$$4+\frac{4}{17} \ \leq\ 2+\sqrt{5}\ \leq\ 4+\frac{5}{21}\ .$$
Somit hat man ein Approximationsintervall für $2+\sqrt{5}$ der Länge $\frac{5}{21}-\frac{4}{17}=\frac{1}{357}$ .

c) Wiederhole diesen Prozess, bis der Fehler kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

d) (*freiwillig*) Schreibe ein Programm, dass diesen Prozess fortsetzt, bis der Fehlerterm kleiner als eine einzugebende Zahl ist.

(6 Punkte)