Mathematik für Physiker: Sommersemester 2009

C. Devchand

(1. Woche)

1. Euklidische und Unitäre Vektorräume

1.1 Bilinear- und Sesquilinearformen, Skalarprodukte, Minkowski-Raum; Normen und Abstände in Vektorräumen, Bsp. Hamming-Abstand in $V = (\mathbb{F}_2)^n$; Cauchy-Schwarz Ungleichung

1.2 Orthonormale Basis, Orthonormalisierung

(2. Woche)

1.3 Winkel zwischen Vektoren

1.4 Adjungierte und selbstadjungierte Abbildungen

1.5 Isometrien oder orthogonale Abbildungen, unitäre Endomorphismen

2. Geometrie in $\mathbb{R}^3$, Vektorprodukt, Spatprodukt

(3. Woche)

3. Determinanten

(4. Woche)

3.1 Cramer'sche Regel

4. Eigenvektoren und Eigenwerte, charakteristishes Polynom

4.1 Symmetrische und hermitesche (selbstadjungierte) Endomorphismen und Matrizen:
a) reelle Eigenwerte b) orthonormale Basis aus Eigenvektoren
c) Diagonalisierbarkeit und kanonische Form

(5. Woche)

4.2 Satz von Cayley–Hamilton

4.3 Orthogonale und unitäre Endomorphismen und Matrizen,
(spezielle) orthogonale und (spezielle) unitäre Gruppen

(6. Woche)

5. Anwendungen der Integration

5.1 Flächeninhalt unter parametrisierten Kurven
5.2 Berechnung der Bogenlänge

6. Approximative Integration
Vergleich von Sehnen- und Tangententrapezformeln, Simpson-Regel

7. Fourierreihen

7.1 Trigonometrische Polynome als Approximation
7.2 Fourierreihen für stetig, stückweise differenzierbare Funktionen auf $[0, 2\pi]$

(7. Woche)

7.3 Allgemeine Intervalle
7.4 Konvergenz im quadratischen Mittel (L^2-Norm), Gibbs-Phänomen, Bessel'sche Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
7.5 Anwendungen: die vibrierende Saite, harmonische Bewegung, erzwungene Schwingungen einer Feder, Resonanz-Phänomene, Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ gegen $\pi^2/6$.

(8. Woche)

8. R^n als Raum

8.1 Offene und abgeschlossene Mengen, Kompaktheit
8.2 Verallgemeinerung (mittels Abständen) der grundlegenden Definitionen der 1-dimensionalen Analysis auf Vektor-Räume; insbesondere auf $\mathbb{R}^n$
8.3 Graphische Darstellung von Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (U offen): Graphen, Niveaumengen (Höhenlinien)

9. Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren reellen Veränderlichen

9.1 Partielle Ableitungen, iterierte partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

(9. Woche)

9.2 Divergenz, Gradient, Rotation; einfache Differentialgleichungen: Gravitationspotential und Laplace–Gleichung, Wellengleichung
9.3 Landau-Symbole o und O
9.4 Differenzierbarkeit; Ableitung als lineare Abbildung, die die Funktion approximiert; Jacobi-Matrix; Differentiationsregeln; Richtungsableitung

(10. Woche)

9.5 Geometrische Bedeutung des Gradienten, Niveaufläche $M_c := \{x \in U \subset \mathbb{R}^n | f(x){=}c\} \subset \mathbb{R}^n$, Tangentialraum von M_c
9.6 Hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit: Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen, d.h. $f \in C^1(U)$
9.7 Satz: Eine differenzierbare Funktion ist stetig.
Bemerkung: Die Stetigkeit ist nicht notwendig für die Differenzierbarkeit.
9.8 Integrabilitätsbedingungen
Ist ein Vektorfeld $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^n\,,\, \mathbb{R}^n)$ das Gradientenfeld einer Funktion $\phi \in C^2(U\,,\, \mathbb{R})$, $f = \nabla\phi$, so genügen die Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ von f den Bedingungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\ .$$

Speziell für $n{=}3$: $\quad f = \nabla\phi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rot}\ f = 0$.
Für beliebige $\varphi \in C^2(U \subset \mathbb{R}^3\,,\, \mathbb{R})$ ist $\quad \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi = 0$.

(11. Woche)

10. Anwendungen der Differentialrechnung
10.1 Taylorformel mit Integral-Restglied, mit Lagrange-Restglied
10.2 Hesse-Form, lokale Minimierer und Maximierer, hinreichende Kriterien für lokale Extrema (Minima und Maxima), kritische Punkte
10.3 Anwendung: harmonische Schwingungen und Lissajou-Figuren

(12. Woche)

10.4 Umkehrfunktionen, Umkehrsatz
10.5 Implizite Funktionen
10.6 Extrema mit Nebenbedingungen, Lagrange-Multiplikatoren

(13. Woche)

11. Differentialformen und Dualraum

12. Integration von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$
12.1 Iterierte Integrale, der Satz von Fubini
12.2 Koordinatentransformation mit Jacobi-Determinanten, Polar- und Kugelkoordinaten
12.2 Kurvenintegrale

(14. Woche)

12.3 Flächenintegrale
12.4 Die Integralsätze der Vektoranalysis (Gauß und Stokes)