Mathematik für Physiker: WS 2008/2009

C. Devchand

(1. Woche)

1. Inklusionen der Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Motivation für die Erweiterung eines Zahlbereiches: im neuen Bereich kann man Gleichungen lösen, die man in bisherigen Zahlbereich nicht lösen könnte.

2. Anfangsbeispiel: *Konstruktion durch Approximation*

2.1 Approximation von $\sqrt{2}$ durch rationalen Zahlen

$\sqrt{2}$ mit einer *beliebigen Genauigkeit* durch rationale Zahlen *approximiert.*

Zentrale Strategie der Analysis: neue Objekte konstuiert durch ("konvergente") Approximationen aus bereits bekannten Objekten. Hier: Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen.

Die Objekte der Analysis werden erst duch Grenzwertbildung bestimmt; solche Grenzwerte macht man durch Fehlerschranken zu präzisen Begriffen.

3. Kurzer Ausflug in die Logik

4. Beweismethoden

4.1 Vollständige Induktion

4.2 Indirekter Beweis. Beispiel: Irrationalität von $\sqrt{2}$

5. Mengen und Abbildungen

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Abzählbarkeit

(2. Woche)

6. Körper

6.1 Beispiele für das Endziffernrechnen. Endliche Körper.

6.2 Rechnen mit Kongruenzen, Kongruenzklassen

(3. Woche)

7. Gruppen

Abelsche (kommutative) Gruppen, Bsp: Kleinsche Vierergruppe (Symmetrien der Ecken eines Rechtecks); Nicht-abelsche (nicht-kommutative) Gruppen, Beispiel: Permutationsgruppe von 3 Elementen S_3

8. Die Betrag-Funktion, Abstand, Dreiecksungleichung

9. Tangenten [nach Karcher]

9.1 Tangente einer Parabel

Kann man für quadratische Parablen, wie für Kreise, Tangenten definieren? Wie weit weicht Parabeltangente $l(x)$ vom Graphen der Parabel ab? Also, wie weit beschreibt die Tangente annährungsweise die Parabel? Abschätzung für die Abweichung einer Parabel von ihrer Tangente. Für Kreise, sowie für Parabeln, ist die Abweichung von der Tangente $\leq (x-a)^2$.

(4. Woche)

9.2. Tangente der Potenzfunktionen $P(x) := x^n$.

9.3 Summe der endlichen geometrischen Reihe: $(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \cdot (1-q) = 1 - q^n$

9.4 die Ungleichung

$$x, a \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \quad |x^n - a^n| \leq nR^{n-1} \cdot |x-a| \tag{1}$$

9.5 Differenzierbarkeit als quadratische Abschätzbarkeit

10. Vektorräume

10.1 Polynomvektorrräume $K_n[x]$

10.2 Weitere Beispiele von Vektorräumen, Standardvektorraum K^n; die Menge aller Abbildungen von irgendeiner Menge M in einen Vektorraum V selbst ein Vektorraum. Wir können also weitere Vektorräume herstellen. Verschiedene Spezialisierungen des K-VRs Abb(M, V), z.B. falls $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $V = K$ ist Abb$(M, V) = K^n$

10.3 Homomorphismus = strukturerhaltende lineare Abbildung:
verträglich mit Addition (additiv) und Zahlen-Multiplikation (homogen).

Beispiele bei Polynomen $P(x)$: Ableitung, Differenzenquotient, Auswertung $W_c(P) := P(c)$ an der Stelle $x = c$.

(5. Woche)

10.4 Linearkombination von Vektoren, Span
Lineare Abbildungen sind mit Linearkombinationen verträglich

10.5 Untervektorräume

Beispiele, $v_1, \ldots, v_k \in V \Longrightarrow \text{span}_K(v_1, \ldots, v_k)$ ist UVR von V,

10.5 Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit

Entscheidung über lineare (Un)Abhängigkeit erfolgt durch Lösen von linearen Gleichungssystemen; Lineare Abbildungen können das sehr abkürzen.

Lineare Abbildungen $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bilden lin. abhängige Vektoren auf lin. abhängige Vektoren ab.

Warnung: Aus $\{v_1, \ldots, v_k\}$ lin. unabhängig *folgt nicht*, daß die Bilder $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ lin. unabhängig sind.

Umgekehrt, falls die Bilder $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ lin. unabhängig sind, dann sind die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jedenfalls lin. unabhängig

10.6 Lagrange-Interpolation

10.7 Basis und Dimension eines Vektorraums

10.8 Polynome und Polynomfunktionen

11. Differenzierbarkeit, Differentiationsregeln

Approximation durch Tangente bis auf quadratischen Fehler

11.1 Linearkombination

(6. Woche)

11.2 Produktregel

11.3 Kettenregel

11.4 Anwendung der Kettenregel auf $g = 1/f$, um eine Quotientenregel zu bekommen

11.5 Diskussion von Wachstumsrate f'/f

12. Ringe

12.1 Ist n eine Primzahl, dann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ ein Körper, bezeichnet $\mathbb{F}_n$.

13 Polynome und Nullstellen

13.1 Division mit Rest

13.2 Nullstellen und ihre Vielfachheit

13.3 Linearfaktorzerlegung, Fundamentalsatz der Algebra

13.4 Binomische Lehrsatz, Binomialkoeffizienten, Binomialverteilung

(7. Woche)

14. Monotoniesatz. Vor: f diffbar; $f' \geq 0$; Beh: $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

14.1 Monoton Funktionen; Folgerungen des MS

14.2 Schrankensatz, Lipschitz-Funktionen

14.3 Schranke für die Tangentenabweichung

14.4 Höhere Ableitungen und verbesserte Fehler; Taylor-Approximation

14.5 Multiplikativer Monotoniesatz für positive Funktionen:

$$\frac{f'}{f} \leq \frac{g'}{g} \quad \text{für} \quad f,g > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{g}{f} \text{ ist schwach wachsend} \tag{2}$$

Beispiel: Polynome $f_m(x) := \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, $0 \leq x$, $m \in \mathbb{N}$ und
$g_m(x) := \frac{1}{\left(1-\frac{x}{m}\right)^m}$, $0 \leq x < k$, $m \in \mathbb{N}$

Ohne Arbeit haben wir aus (2) die Monotonie hergeleitet:

$$f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots\cdots \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq \cdots \leq g_1(x) \tag{3}$$

Interpretation als Zinseszinseffekts

14.6 Archimedes Axiom. Folgerung: **Archimedes-Argument**:
Um eine Ungleichung $a \leq b$ zu beweisen, genügt es, $a \leq b + const/n$ zu beweisen.

14.7 Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

14.8 Beweis des Monotoniesatzes mit Archimedes Strategie und Teleskopsumme

(8. Woche)

15. Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit II

15.1 Austauschsatz

Aussage A:
Es seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ n lin. unabhängige Vektoren und $U := \text{span}_K(v_1, \dots, v_n)$ der Unterraum ihrer Linearkombinationen. Dann sind n+1 Vektoren $w_j \in U$, $j = 1, \dots, n$+1 stets linear abhängig.

Dies bedeutet z.B. für die Polynome vom Grad $\leq n - 1$: mehr als n linear unabhängige findet man nicht.

Aussage A folgt aus

Aussage B:
Es seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabhängige Vektoren, $U := \text{span}_K(v_1, \dots, v_n)$, und $w_1, \dots, w_n \in U$ (also Linearkombinationen der v_i) ebenfalls lin. unabhängige Vektoren. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ Linearkombinationen von $w_1, \dots, w_n$.

15.2 Äquivalente Beschreibungen einer Basis von K-Vektorraum V als:
a) größte Menge linear unabhängiger Vektoren in V
b) unverlängerbares l.u. System in V
c) kleinste Menge, die V aufspannt
d) unverkurzbares Erzeugendensystem on V

16. Basis und Matrixdarstellung

16.1 $V = \text{span}_K(v_1, \dots, v_n) \quad \Longrightarrow \quad L \in \text{Hom}(V, W)$ ist eindeutig durch die Bilder $\{L(v_i)\}_{i=1,\dots n}$ bestimmt.

16.2 Isomorphismus von einem n-dimensionalen K-Vektorraum V mit K^n, $C^A : V \to K^n$ (Koordinaten bezüglich einer Basis A für V).

16.3 Matrixdarstellung von $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bzgl. der Basen in V, W

(9. Woche)

16.4 Matrixprodukt als Komposition linearer Abbildungen

17. Folgen

17.1 Nullfolge, Konvergenz, Grenzwert, Intervallschachtelung

17.2 Vollständigkeitsaxiom

(10. Woche)

17.3 Majorisierungsprinzip, Monoton wachsende und fallende Folgen,

17.4 Jede monoton wachsende und beschränkte Folge ist konvergent

17.5 Konstruktion der Exponentialfunktion: mit Archimedes-Strategie und Monotoniesatz (Lipschitzschranke, Tangentenabweichung)

17.6 Eigenschaften der Exponentialfunktion

17.7 Taylor-Approximation

17.8 Cauchy-Folgen, jede reelle Cauchyfolge konvergiert

17.8 Reihen; Konvergenz von Reihen, absolut Konvergenz, Kriterien für Konvergenz von Reihen: Monotoniekriterium, Leibniz und Cauchy Kriterien.

(11. Woche)

17.9 Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

17.10 Geometrisch majorisierte Folge, Kontraktionslemma, Fixpunkt einer Abbildung

18. Differenzierbarkeit weitere Funktionen

18.1 Differentierbarkeit von Kurven und vektorwertige Funktionen

18.2 Sinus und Cosinus

18.3 Umkehrfunktionen zu bijektiven Funktionen, Differenzierbarkeit, Existenz von Umkehrfunktionen zu monotonen dehnungsbeschränkten Funktionen

(12. Woche)

18.4 Logarithmusfunktion: ln als außerordentlich langsam wachsende Funktion.

18.5 Die allgemeine Potenzfunktion oder Exponentialfunktion zu beliebiger Basis:
$x \mapsto a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$ für $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. (Wir setzen weiter: $0^x := 0$ für $x > 0$).

19. Lineare Gleichungssysteme

19.1 Dimensionssatz: $L \in \mathrm{Hom}(V, W),\ \dim V < \infty \Longrightarrow \dim V = \mathrm{Rang}\, L + \dim\ \mathrm{Ker}\, L$

19.2 Kriterium für Lösbarkeit, Gaußelimination

(13. Woche)

20. Basiswechsel und Transformationsmatrix

21. Komplexe Zahlen

22. Stetigkeit

22.1 Kriterien für Stetigkeit

22.2 Zwischenwertsatz, Anwendung: Cosinus hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle; Periodizität von Sinus und Cosinus.

(14. Woche)

22.3 **Beschränktheitssatz**: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

22.4 **Maximumsatz**: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum an,
d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) \geq f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$.

22.5 Endgültige Differenzierbarkeitsdefinition mit ,,gröberen Fehler" als die quadratischen.

22.6 Notwendige und hinreichende Kriterien für Extrema, Mittelwertsatz der Differentialrechnung

23. Integration von Funktionen auf $\mathbb{R}$

23.1 Riemannsumme, (Riemann) Intergrierbarkeit

23.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung, Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung

23.3 Eigenschaften des Integrals (vgl. mit Summen)

(15. Woche)

23.4 Integrationsregeln: Partielle Integration, Substitutionsregel. Beispiele, Flächeninhalt der Einheitskreisscheibe.

23.5 Die Grundintegrale

23.6 Vertauschbarkeit von Integration und Konvergenz

24 Abschlußbeispiele

24.1 Cantor-Menge

24.2 Koch'sche Kurve und Schneeflocke

24.3 Cantortreppe: eine stetige, monoton wachsende Funktion, die ,,fast überall" f'=0 hat

24.4 Weierstraß Oszillator: eine stetige Funktion, die in **keinem** Punkt differenzierbar ist