Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 9 (Aufgaben 9.1 - 9.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 20.12.2007

Aufgabe 9.1 (Lineare Abbildung)

a) Zeige, dass die rationalen Funktionen

$$f_1(x) = \frac{4711}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{6783}{x-2}, \quad f_3(x) = \frac{5/9}{x-3}$$

linear unabhängig sind. (Bearbeitung mittels eines 3×3–Gleichungssystems gilt als Notlösung!) Beachte, dass falls die Bilder einer linearen Abbildung eines Vektorraumes $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ linear unabhängig sind, so sind auch die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ stets linear unabhängig.

b) Bestimme $A, B, C \in \mathbb{Q}$ so dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = A\frac{4711}{x-1} + B\frac{6783}{x-2} + C\frac{5/9}{x-3}$$

und zeige mit a) die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2 (Komposition von zwei linearen Abbildungen)

Betrachte folgende lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned} A: \ \mathbb{Q}_3[X] &\to \mathbb{Q}_2[X] \\ P(X) &\mapsto P'(X) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} B: \ \mathbb{Q}_2[X] &\to \mathbb{Q}_3[X] \\ Q(X) &\mapsto (X-1)Q(X) \end{aligned}$$

a) Bestimme den Kern (wo?) und das Bild (auch wo?) von $A \circ B$.

b) Bestimme den Kern und das Bild von $B \circ A$.

c) Bestimme $V = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \mid (B \circ A)(P) = P\}$ und zeige, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}_3[X]$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 9.3 (Mehr über lineare Abhängigkeit)

Für $q \in \mathbb{Q}$ sei

$$W_q : \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q} \quad , \quad P(X) \mapsto P(q)$$

also, W_q ordnet einem Polynom seinen Wert an der Stelle q zu. W_q ist ein Element von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ und da $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum ist, ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ auch ein Vektorraum.

a) Zeige: Je drei der Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear unabhängig.

b) Zeige: Alle vier Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear abhängig.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.4 (Polynome und Polynomfunktionen mod 7)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7)$ der Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$ (Vorlesung: Die Menge aller Abbildungen von irgendeiner Menge M in einen Vektorraum V ist selbst ein Vektorraum). Jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ liefert eine Abbildung $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, indem $x \in \mathbb{F}_7$ nach $P(x) \in \mathbb{F}_7$ abgebildet wird. So haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{F}_7[X] \quad &\to \quad \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7) \\ P(X) \quad &\mapsto \quad L(P) := (x \mapsto P(x)) \end{aligned}$$

a) Zeige, dass L eine lineare Abbildung ist.

b) Zeige, dass L surjektiv ist. (Bemerke den Unterschied zum üblichen Fall reeller Koeffizienten: Jeder "*weiß*", dass es andere Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gibt als Polynome).

c) Zeige, dass L injektiv ist, wenn man L auf den Untervektorraum aller Polynome in $\mathbb{F}_7[X]$ mit Grad kleiner oder gleich 6 einschränkt. (Überladene Bezeichnung: $(\mathbb{F}_7)_6[X]$.)

d) Rechne nach, dass in $\mathbb{F}_7[X]$ gilt:

$$X^7 - X = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)$$

und folgere daraus, dass $L(X^7 - X) = 0$, was auch ganz anders ist, als bei den Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

(6 Punkte)