Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Lineare Algebra und analytische Geometrie
# WS 2007/08 Blatt 8 (Aufgaben 8.1 - 8.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 13.12.2007

---

**Aufgabe 8.1 (Spann und linear unabhängige Vektoren)**

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem K-Vektorraum $V$ und die Vektoren $w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ $(a_{jk} \in K;\ j = 1, ..., n)$ seien ebenfalls linear unabhängig.

a) Sei $u \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_k, u$ auch linear unabhängig sind.

b) Zeige, dass es ein $i$ gibt mit $a_{i1} \neq 0$. Nach Umbenennung darf $a_{11} \neq 0$ angenommen werden. Berechne $v_1$ in Abhängigkeit von $w_1, v_2, \ldots, v_n$.

c) Zeige, dass die Vektoren $a_{11}w_2 - a_{21}w_1,\ a_{11}w_3 - a_{31}w_1, \ldots, a_{11}w_n - a_{n1}w_1$ linear unabhängig sind.

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.2 (Vektoren austauschen)**

a) Betrachte die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$ , $i = 1, 2, 3, 4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1e_1 + 3e_2 + 5e_3 \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 1e_2 - 1e_3 \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3 \ ,$$

wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Warum sind die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig? (Ohne Rechnng!)

Tausche auf der rechten Seite sukzessiv $e_i$ gegen $v_i$ aus, um die linear Abhängigkeiten der Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu bestimmen.

b) Betrachte die beiden Untervektorräume $E_1, E_2$ von $\mathbb{R}^3$, die definiert sind als

$$E_1 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gib Basen für $E_1$ und $E_2$ an und bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(E_1)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(E_2)$.
Zeige: $E_1 = E_2$.

(8 Punkte)

### Aufgabe 8.3 (Koeffizienten an der Entwicklungsstelle)

Beweise mittels Induktion für alle $a \in \mathbb{Q}$ die binomische Formel,

$$(a+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k \ .$$

Wende diese Formel auf $X = a + (X - a)$ an, um auf eine andere Weise als in Aufgabe 7.2 zu zeigen, dass es Zahlen $b_k \in \mathbb{Q}$ gibt mit

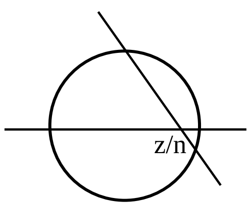
$$P(X) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} b_k (X-a)^k$$

Wir sagen dazu auch, dass wir das Polynom $P(X)$ an der Stelle $X{=}a$ entwickeln. Wie hängen die Werte $P^{(k)}(a)$, der $k$-ten Ableitung von $P$ an der Stelle $a$ mit den Entwicklungskoeffizienten $b_k$ zusammen?

(4 Punkte)

### Aufgabe 8.4 (Rationale Kreispunkte)

Gegeben sei der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und eine Gerade, die den Punkt $(0,1)$ des Kreises mit dem rationalen Punkt $(z/n, 0)$ der x-Achse verbindet ($z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$). Berechne den zweiten Schnittpunkt der Gerade mit dem Kreis und zeige, dass seine beiden Koordinaten rational sind.




*(Wie liefert jeder rationale Punkt auf dem Einheitskreis (vgl. obige Berechnung) ein pythagoräisches Tripel $a, b, c \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = c^2$ ?)*

(4 Punkte)