Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 7 (Aufgaben 7.1 - 7.6)

Abgabe vor der Vorlesung am 6.12.2007

Aufgabe 7.1 (Vollständige Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_1(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, $S_2(n)$ die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, usw.
Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle n gelten:

$$\begin{aligned} S_1(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ S_3(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \ . \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 7.2 (Polynomfaktorisierungen)

a) Beweise mittels Induktion $\left(\text{Hinweis: verwende } \sum_{k=0}^{n+1} b_k := b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k\right)$:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } a \in \mathbb{Q} \text{ gilt :} \quad X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1}a^k \ .$$

b) Zeige unter Verwendung von a), dass sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, für das $P(X) - P(a) = (X-a)Q_a(X)$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Überprüfe für die folgenden K-Vektorräume V, ob $M \subset V$ linear unabhängig ist:

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $M = \{1, \sqrt{2}\}$

c) $K = \mathbb{R}$, $V = \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M = \{f_x \mid x \in \mathbb{R}\}$, wobei $f_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t = x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(3 Punkte)

Aufgabe 7.4 (Basen von $\mathbb{Q}_3[X]$)

Begründe kurz, welche der folgenden Mengen eine Basis, ein Erzeugendensystem oder linear unabhängig in $\mathbb{Q}_3[X]$ sind (dies kann *wirklich* ohne Gleichungssysteme beantwortet werden):

a) $\{1\,,\; X-1\,, X^2-5X\,,\; 17X^3+273X^2+101\}$

b) $\{X(X-1)(X-2)\,,\; X(X-1)(X-3)\,,\; 56X(X-1)(X-5)\}$

c) $\{X(X-1)(X-2)\,,\; X(X-1)(X-3)\,,\; X(X-2)(X-3)\,,\; (X-1)(X-2)(X-3)\}$

d) $\{X^3\,,\; X^3-X^2\,,\; X^3-5X^2+37X\,,\; X^3-400X^2+1\,,\; 1\}$

e) Die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$

f) $\{1\,,\; X\,,\; X^2\}$ (Bemerke: dies ist eine Basis, aber von $\mathbb{Q}_2[X]$)

g) $\{1\,,\; X\,,\; 456X^3+345X^2+187X+471\}$

h) $\{1\,,\; 1+X\,,\; 1+X+\frac{1}{2}X^2\,,\; 1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.5 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Begründe, welche der nachfolgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, und welche Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$

(4 Punkte)

Aufgabe 7.6 (Definitionen)

Keine Abgabe, aber eine wichtige Übung: Inzwischen müssten die grundlegenden Definitionen längst verinnerlicht sein.

Schreibe in Schönschrift, aus dem Gedächtnis, die Definitionen von **Gruppe, Körper, Ring, Vektorraum, lineare Abbildung, linear abhängig, linear unabhängig** und **Basis** auf.

Nun korrigiere die Definitionen selbst und hänge das Blatt auf, wo es mindestens zweimal am Tag gelesen wird (z.B. gegenüber vom Klo!).

Wiederhole die Übung jeden Tag, bis alle Definitionen ohne Fehler wiedergegeben werden können.