Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Lineare Algebra und analytische Geometrie
# WS 2007/08 Blatt 6 (Aufgaben 6.1 - 6.5)

Abgabe vor der Vorlesung am 29.11.2007

---

## Aufgabe 6.1 (Polynomdivision)

a) Bestimme Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ (vom Grade ?), damit:

   i) $X^4 - a^4 - 4a^3(X-a) = (X-a)^2 \cdot P(X)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt

   ii) $X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2) \cdot P(X)$

   iii) $X^n - 1 = (X-1) \cdot P(X)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

b) Rechne $Q, R \in \mathbb{F}_7[X]$ aus, so dass

$$F(X) := X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 1 \;=\; (X+6) \cdot Q \;+\; R\ .$$

Prüfe nach, dass $R = W_1(F) := F(1)$, dem Wert des Polynoms $F$ an der Stelle $1 \in \mathbb{F}_7$, und erkläre diese Gleichheit.

(5 Punkte)

## Aufgabe 6.2 (Polynome)

a) Zeige, ohne Benutzung der Polynomdivision, dass es keine Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, sodass

   i) $X^5 + 5X^2 + 2 = (X-1)P(X)$

   ii) $X^6 - 3X^5 + 2X^3 - 3X^2 + 7X - 7 = (X-1)^2 Q(X)$ .

b) Betrachte

$$R(X) := X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2\ .$$

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $X{=}1$? Wie viele Nullstellen besitzt $R(X)$?

(4 Punkte)

**Aufgabe 6.3 (Polynomfaktorisierungen)**

a) Beweise mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$:

$$X^n - a^n = (X-a) \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1} a^k \ .$$

$\Big($Hinweis: Verwende $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} b_k := b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$.

b) Zeige unter Verwendung von a), dass sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, für das $P(X) - P(a) = (X-a)Q_a(X)$ gilt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 6.4 (Untervektorräume)**

Begründe, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind:

a) Geraden, die die 0 enthalten,

b) Geraden, die die 0 nicht enthalten,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1)^2 = (x_2)^2 \right\}$ ,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = (x_2)^2 \right\}$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 6.5 (Untervektorraum)**

Sei $K$ ein Körper. Zu $\alpha \in K$ definieren wir

$$U_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \right\} .$$

Zeige, dass $U_\alpha$ genau dann ein Untervektorraum von $K^3$ ist, wenn $\alpha = 0$.

(3 Punkte)