Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 5 (Aufgaben 5.1 - 5.5)

Abgabe vor der Vorlesung am 22.11.2007

Aufgabe 5.1 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Betrachte $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und überprüfe folgende Systeme von Vektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit:

i) $(1,0,-1)$, $(1,2,1)$, $(0,-3,2)$
ii) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$
iii) $(9,1,5)$, $(17,11,14)$, $(18,2,10)$
iv) $(1,9,7)$, $(2,3,4)$, $(9,7,6)$, (6,6,6) . (4 Punkte)

Aufgabe 5.2 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Betrachte die Polynome

$$P_1(X) := X - 1 \quad , \quad P_2(X) := X - 2 \quad , \quad P_3(X) := X - 3 \; .$$

Zeige, dass je zwei von diesen linear unabhängig, aber alle drei linear abhängig sind. (Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$)

(3 Punkte)

Aufgabe 5.3 (Lagrange Interpolation)

Sind die folgenden kubischen Polynome aus $\mathbb{Q}_3[X]$ linear abhängig?

$$P_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)(X-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \quad , \quad P_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)(X-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$P_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \quad , \quad P_4(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \; .$$

(Beantwortung mittels eines Gleichungssystems gilt als Notlösung).

Finde eine Linearkombination $Q(X) = \sum_{i=1}^{4} a_i P_i(X)$, die an den vier Stellen $X = 1, 2, 3, 4$ den Wert $\frac{315}{19}$ hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.4 (Lineare Abbildungen)

Es sei $\mathbb{Q}_3[X]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

a) Zeige, dass es keine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{Q}_3[X] &\rightarrow \mathbb{Q}_3[X] \\ P &\mapsto Q = F(P), \qquad \text{für } P, Q \in \mathbb{Q}_3[X] \end{aligned}$$

gibt, so dass

$$F(1) = X \quad , \quad F(X) = 1 \quad \text{und} \quad F(1+X) = X^2 \; .$$

b) Zeige, dass es auch keine lineare Abbildung $G : \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} G(X^3 + 2X^2 + 5X + 1) &= X^2 + 3X \\ G(2X^3 + 5X^2 + 7X + 2) &= X^3 \\ G(X^2 - 3X) &= X^3 - 2X^2 \; . \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.5 (Komplexe Zahlen)

Wir haben schon gesehen wie aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper wird, nämlich $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, in dem $P(x) = x^2 - 2$ zwei Nullstellen hat (Aufgabe 3.1). Wichtiger ist, den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ so zu einen Körper K zu machen, dass auch $Q(x) = x^2 + 1$ zwei Nullstellen hat:
Da wir die Addition in $\mathbb{Q}^2$ schon haben, muß nur noch die Multiplikation definiert werden. Dazu soll das Element $(1,0) \in \mathbb{Q}^2$ als neutrales Element 1_K bezeichnet werden, und als Multiplikation mit den Elementen $(q,0) = q \cdot 1_K$ soll die Skalarmultiplikation in $\mathbb{Q}^2$ weiterverwendet werden, also $(q,0) \cdot (u,v) := (q \cdot u \; , \; q \cdot v)$.
Damit sind die Vektorraumeigenschaften ausgenutzt, und es fehlt nur noch die Definition von $(0,1) \cdot (0,1)$. Dies soll Nullstelle von $Q(x) = x^2 + 1$ werden. Wir definieren daher:

$$(0,1) \cdot (0,1) := (-1,0) = -1_K \, , \qquad \text{kurz: } i := (0,1)$$

Oder ausführlicher: $(a \cdot 1_K + b \cdot i) \cdot (c \cdot 1_K + d \cdot i) = (ac - bd) \cdot 1_K + (ad + bc) \cdot i$.

Zeige die Gültigkeit aller auf die Multiplikation bezogenen Körperaxiome, nämlich:

a) 1_K ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

b) Die Multiplikation ist kommutativ sowie assoziativ.

c) Das Distributivgesetz gilt.

d) $\frac{a}{a^2+b^2} \cdot 1_K - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$ ist multiplikatives Inverses von $(a,b) = a \cdot 1_K + b \cdot i$.

(4 Punkte)