Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 4 (Aufgaben 4.1 - 4.5)

Abgabe vor der Vorlesung am 15.11.2007

Aufgabe 4.1 (Untergruppe)

Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe $(V_4\,,\,\circ)$ mit $V_4 := \{(1), (14)(23), (12)(34), (13)(24)\}$ (vgl. Aufgabe 3.4) eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2 (Kleiner Satz von Fermat)

Berechne mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 2.2:

$$a^6 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{F}_7 \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3 (Rechnen mit Polynomen)

a) Sei $\mathbb{F}_7[X]$ die Menge aller Polynome mit Koeffzienten in $\mathbb{F}_7$. Man kann solche Polynome koeffzientenweise addieren, also

$$\begin{aligned} & (3x+5) \bmod 7 + (4x^2+4x+2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4x^2 \bmod 7 + ((3+4)x) \bmod 7 + (5+2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4x^2 \bmod 7\ . \end{aligned}$$

Man kann auch mit einem Element von $\mathbb{F}_7$ multiplizieren, also

$$(4 \bmod 7) \cdot ((3x+1) \bmod 7) \equiv (12x+4) \bmod 7 \equiv (5x+4) \bmod 7\ .$$

Zeige, dass $\mathbb{F}_7[X]$ mit diesen Rechenregeln zu einem $\mathbb{F}_7$-Vektorraum wird. Schreibe den Beweis so auf, dass nur benutzt wird, dass $\mathbb{F}_7$ die Körperaxiome erfüllt.

b) Warum hat ein quadratisches Polynom $P \in \mathbb{F}_7[X]$, $P \neq 0$, höchstens zwei Nullstellen?

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4 (K-Vektorräume)

Betrachte die Indexmenge $M = \{1, \dots, n\}$ und einen Körper K. Zeige: die Produktmenge

$$V = K^n = \left\{ \begin{array}{rcl} v : M & \rightarrow & K \\ i & \mapsto & v_i \end{array} \right\}$$

mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ist ein K-Vektorraum.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.5 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear (warum oder warum nicht)?

a) $F_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x$

b) $F_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x + 2$

c) $F_3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto x^2$

d) $F_4 : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X], \qquad P(x) \mapsto P(x) + x^2 + 3x$

e) $F_5 : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X], \qquad P(x) \mapsto (3x + 2)P(x)$

f) $F_6 : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X], \qquad P(x) \mapsto P(x + 1)$

(4 Punkte)