Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 3 (Aufgaben 3.1 - 3.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 8.11.2007

Aufgabe 3.1 (Körperaxiome)

Läßt sich mit den Zahlenpaaren (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$, so rechnen, dass die Körperaxiome erfüllt sind?
Zeige, dass mit der Addition der "Komponenten", $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, eine kommutative Gruppe gegeben ist.
Versuche zunächst die Multiplication durch $(a, b) * (c, d) := (ac, bd)$ zu definieren.
Welches Körperaxiom ist dann nicht zu erfüllen?
Was ändert sich wenn (a, b) als $(a+b\sqrt{2})$ umgedeutet wird? Zeige, dass dann einen Körper gegeben ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.2 (Zyklische Gruppe)

Auf der Menge der Restklassen modulo q

$$\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{[n] = n + q\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

können wir eine Addition definieren durch $[m] + [n] = [m + n]$.

Zeige: Mit dieser Addition als Verknünpfung ist $\mathbb{Z}_q$ eine abelsche Gruppe mit q Elementen $[0], [1], \ldots, [q - 1]$.

Diese Gruppe heißt *Zyklische Gruppe der Ordnung q*: Addieren wir zu einem beliebigen Element von $\mathbb{Z}_q$ das Element $[1]$, dazu wieder $[1]$ usw., dann durchlaufen wir nacheinander alle Elemente von $\mathbb{Z}_q$ bis wir nach q Schritten zum Ausgangspunkt zurückkehren.

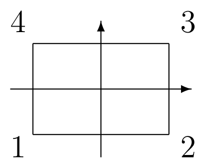
(3 Punkte)

Aufgabe 3.3 (Symmetrische Gruppe)

Betrachte die Permutationen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$.
Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Permutationen.
Zeige, dass die Menge alle Permutationen, zusammen mit der Komposition als Verknüpfung, eine nicht-kommutative Gruppe bildet.
(Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe von drei Elementen*, S_3.)

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4 (Kleinsche Vierergruppe)

a) 

Betrachte die Symmetriegruppe eines Rechtsecks mit ungleichen Seiten. Wir ordnen den Ecken die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ zu. Die Symmetrien, die die Abstände erhalten, sind gegeben durch:

$$
\begin{array}{rcll}
e & : & (1,2,3,4) \to (1,2,3,4) & \text{neutrale Abbildung} \\
f & : & (1,2,3,4) \to (4,3,2,1) & \text{Spiegelung an der x-Achse} \\
g & : & (1,2,3,4) \to (2,1,4,3) & \text{Spiegelung an der y-Achse} \\
h & : & (1,2,3,4) \to (3,4,1,2) & \text{Drehung um } 180^\circ X
\end{array}
$$

Zeige: die Menge der Abbildungen $V_4; = \{e, f, g, h\}$ mit Komposition als Verknüpfung bildet eine kommutative Gruppe, genannt *Kleinsche Vierergruppe*. Schreibe die Gruppentafel (Verknüpfungstabelle) aus.

b) Betrachte nun die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, mit Elementen $\{(0,0)\,, (0,1)\,, (1,0)\,, (1,1)\}$. Bestimme die Gruppentafel. Gibt es eine Verbindung zur Gruppentafel der Abbildungen V_4 in a)?

(6 Punkte)