Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 28 (Aufgaben 28.1 - 28.4)

(Wiederholungsaufgaben)

Aufgabe 28.1 (Adjungierte Matrix)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Zeige, dass das Adjungierte von A bezüglich des hermiteschen Skalarprodukts

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto g(v, w) := v^T \cdot B \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 28.2 (Kommutative Untergruppe)

Sei $U(n) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ und
$T = \left\{ \mathrm{diag}\,(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}) \;\middle|\; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.
Beweise: T ist eine kommutative Untergruppe von G.

Aufgabe 28.3 (Orthonormalsystem)

Sei V der hermitesche Vektorraum aller auf $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ stetigen komplexen Funktionen, mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

Zeige, dass die Funktionen $\varphi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \in V$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, orthonormal sind.

Aufgabe 28.4 (Wiederholung)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, und welche falsch? (Gegebenenfalls mit Begründung oder einen Gegenbeispiel).

a) Jede diagonalisierbare Abbildung ist normal.

b) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist positiv definit, wenn $\det A > 0$ gilt.

c) Eine symmetrische Bilinearform $B : V \times V \to K$ ist genau dann nicht entartet, wenn die induzierte Abbildung $V \to V^*$ injektiv ist.

d) Hat das charakterisctische Polynom einer linearen Abbildung die Form

$$(X - \lambda)^2 \cdot P(X) \in K[X] ,$$

so hat ihr Eigenraum zum Eigenwert λ mindestens die Dimension 2.