Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 27 (Aufgaben 27.1 - 27.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 10.7.2008

Aufgabe 27.1 (Dualraum)

Seien wie üblich V, W K-Vektorräume. Sei $f \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$.

a) Zeige: Die Abbildung $f^* : \mathrm{Hom}\,(W, K) \to \mathrm{Hom}\,(V, K)$ ist linear, wobei f^* definiert ist für jedes $l \in \mathrm{Hom}\,(W, K)$ durch $f^*(l) := l \circ f$.

b) Zeige, dass f^* injektive ist, wenn f surjektiv ist.

c) Zeige, dass f^* surjektive ist, wenn f injektiv ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 27.2 (Duale Basis)

a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = \{b_i\}$ und dazu dualer Basis $B^* = \{b_i^*\}$ in V^*. Betrachte die (eindeutigen) Basisdarstellungen

$$V \ni v = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \quad \text{bzw.} \quad V^* \ni w = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^*$$

um die Koordinaten v_j bzw. w_j von v bzw. w zu bestimmen und zeige dass:

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) b_i \quad , \quad w = \sum_{i=1}^{n} w(b_i) b_i^* \ .$$

b) Betrachte die folgende Basis des Vektorraums $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Linearform gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, : V &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \mathrm{tr}\, A \ . \end{aligned}$$

Zeige: $\mathrm{tr} \in V^*$ bezüglich der dualen Basis B^* ist gegeben durch

$$\mathrm{tr}\, = b_1^* + b_2^* + 2b_4^* \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 27.3 (Bilineare Abbildungen))

Seien V ein K-Vektorraum und $f : V \times V \to K$ bilinear.

a) Definiere $f_{sym} : V \times V \to K$ durch $f_{sym}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u))$. Zeige, dass f_{sym} eine *symmetrische* Bilinearform ist

b) Definiere $f_{alt} : V \times V \to K$ durch $f_{alt}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) - f(v, u))$. Zeige, dass f_{alt} eine *schiefsymmetrische* Bilinearform ist

c) Folgere, dass jede bilineare Abbildung sich als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen schreiben läßt. Ferner zeige, dass wenn $f := f_1 + f_2$ mit f_1 symmetrisch und f_2 schiefsymmetrisch $f_{sym} = f_1$ und $f_{alt} = f_2$ gilt.

d) Nehme jetzt an, dass f symmetrisch ist. Definiere $q_f : V \to K$ durch $q_f(v) := f(v, v)$. Zeige: f ist durch q_f bereits bestimmt, d.h. zeige, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$f(u, v) = \frac{1}{4}\left(q_f(u + v) - q_f(u - v)\right) \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 27.4 (Jordan Normalform)

Sei $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die charakteristischen Polynome von A und B (ganzzahlige Eigenwerte).

b) Bestimme die reelen Jordanschen Normalformen von A und B und jeweils eine Jordan-Basis (eine Basis, in welcher A bzw. B die Jordan-Form annimmt).

c) Gibt es eine Matrix $T \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = B$? Begründe die Antwort!

(6 Punkte)