Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 26 (Aufgaben 26.1 - 26.3)

Abgabe vor der Vorlesung am 3.7.2008

Aufgabe 26.1 (Lineare Differentialgleichungen I)

Bestimme alle Lösungen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der linearen Differentialgleichungssysteme

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \cdot x(t) := \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = B \cdot y(t) := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei $' = \frac{d}{dt}$.

Anleitung:

a) Finde $X, Y \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, so dass

$$X^{-1}AX = J_2(3,1)$$
$$Y^{-1}BY = J_2(-2) \, .$$

Also, bringe A und B durch Basiswechsel auf einer der möglichen Formen aus Aufgabe 25.1.

b) Finde die allgemeine Lösungen der Differentialgleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = J_2(3,1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = J_2(-2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

und benutze die Transformationsmatrizen X, Y aus a) , um die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungssysteme (1) und (2) zu finden.

c) Prüfe nach, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich Lösungen sind.

(8 Punkte)

Aufgabe 26.2 (Lineare Differentialgleichungen II (warum heißen sie so?))
Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto f(t)$ eine Funktion. Betrachte die Differentialgleichung

$$f'' - \alpha f' - \beta f = 0\ . \tag{DGL1}$$

Definiere $g = f'$. Dann betrachte die Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\ . \tag{DGL2}$$

a) Zeige, dass mit zwei Lösungen auch jede Linearkombination von diesen wieder Lösung ist.

b) Zeige, wie Lösungen von (DGL2) Lösungen von (DGL1) liefern.

c) Für $a \in \mathbb{R}$ finde alle reelen Lösungen von

$$f'' - 2af' + a^2 f = 0\ .$$

d) Formuliere Aussagen wie in a) und b) für Differentialgleichungen der Form

$$f^{(n)} = \alpha_0 f + \alpha_1 f' + \cdots + \alpha_{n-1} f^{(n-1)}\ .$$

e) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}\ .$$

(Hinweis: Determinantenentwicklung nach der letzten Zeile). (7 Punkte)

Aufgabe 26.3 (Lineare Differentialgleichungen III)
Finde die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $y'(t) = A \cdot y(t)$, wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ ,\ t \mapsto y(t)$ und

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(s. Anleitung zu Aufgabe 26.1). (5 Punkte)