Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008   Blatt 25 (Aufgaben 25.1 - 25.3)

Abgabe vor der Vorlesung am 26.6.2008

Aufgabe 25.1 (Klassifizierung 2×2 Matrizen)

a) Beweise: Jede reelle 2×2 Matrix ist entweder a) diagonalosierbar, b) trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar, oder c) von dem Typ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 24.4.

(Hinweis: Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ hat entweder zwei Eigenvektoren in $\mathbb{R}^2$ oder einen oder keinen).

b) Begründe, dass jede Matrix aus $\mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ zu einer Matrix aus einer der folgenden Mengen konjugiert ist:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,|\, \lambda_1 \geq \lambda_2 \right\} \\ M_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,|\, b > 0 \right\} , \end{aligned}$$

und zwar entsprechend den drei Typen in a).

c) Vom welchem der Typen sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und in welche Matrizen aus Teil b) lassen sie sich überführen?

(9 Punkte)

Aufgabe 25.2 (Jordan Basis)

Sei $L_n(\lambda)$ der Vektorraum aller Funktionen der Form $P(x) \cdot \exp(\lambda x)$ wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $P(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade $\leq n{-}1$ ist. Betrachte die Basiselemente $e_{i+1} = \dfrac{x^i}{i!} \exp(\lambda x)$, $i = 0, 1, \ldots, n{-}1$. Zeige, dass die darstellende Matrix der Differentiationsabbildung $L := \frac{d}{dx} \in \mathrm{End}\,(L_n(\lambda))$ bezüglich dieser Basis eine Jordanmatrix ist. Die Funktionen $(\frac{x^i}{i!} \exp(\lambda x))$ bilden eine Jordan-Basis für die Abbildung L in dem Vektorraum $L_n(\lambda)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 25.3 (Exponentialfunktion einer Matrix)

Sei $B(b) := \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ und $R(b) := \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

In Aufgabe 23.1 wurde gezeigt, dass aus $B(b)^2 = -b^2 I_2$ durch Einsetzen in die Exponentialreihe die Gleichung $\exp B(b) = R(b)$ folgt.

Nun sei

$$A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} & I_2 & & 0 \\ & \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2k \times 2k, \mathbb{R}) \ ,$$

wobei $I_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix ist.

Zeige, dass A in eine Summe von drei paarweise kommutierenden Matrizen zerlegbar ist. Nämlich, $A = a \cdot I_{2k} + b \cdot H + N$ mit

$$H = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} .$$

Nun benutze das Resultat von Aufgabe 23.1 c) für kommutierenden Matrizen sowie die oben erwähnte Gleichung $\exp B(b) = R(b)$, um zu zeigen, dass

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) & \frac{e^a}{(2!)}R(b) & \cdots & \frac{e^a}{(k-1)!}R(b) \\ & \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) & & \frac{e^a}{(k-2)!}R(b) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) \\ 0 & & & & \frac{e^a}{0!}R(b) \end{pmatrix} .$$

(7 Punkte)