Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 24 (Aufgaben 24.1 - 24.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 19.6.2008

Aufgabe 24.1 (Nilpotente Matrizen)

a) Zeige, dass eine nilpotente Matrix genau einen Eigenwert hat, nämlich Null.

b) Zeige. dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q}) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, F_7)$$

nilpotent sind. Was sind die Nilpotenzordnungen.

c) Errate die Jordan–Normalformen von A und B (mit Begründung!).

(8 Punkte)

Aufgabe 24.2 (Jordan Normalform)
Bestimme die Jordan-Normalform von

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -10 & 20 & 37 \\ 0 & 3 & -10 & 10 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{Q}) \ .$$

Was sind die algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte? Gib das Minimalpolynom von A an. (5 Punkte)

Aufgabe 24.3 (Invariante Unterräume)
Seien V ein K-Vektorraum, $L \in \mathrm{End}\,(V)$ und $\lambda \in K$. Ferner sei $U := \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id})^2$. Zeige, dass U invariant unter L ist. (4 Punkte)

Aufgabe 24.4 (Reelle Matrix)
Zeige mit Hilfe von Aufgabe 22.4, dass jeder Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, der *keinen* Eigenvektor in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ hat, bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Matrix der Form
$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben wird. (3 Punkte)