Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 23 (Aufgaben 23.1 - 23.3)

Abgabe vor der Vorlesung am 12.6.2008

Aufgabe 23.1 (Exponentialreihe)

a) Beweise:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

b) Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne und vergleiche die Matrizen $\exp A \cdot \exp B$ und $\exp(A+B)$.

c) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $AB = BA$. Beweise:

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B\ .$$

(Vergleiche Aufgabe 12.3).

d) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine schiefhermitesche Matrix $A^\dagger = -A$.
Zeige, dass $\exp A$ eine unitäre Matrix ist.

e) Berechne die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Zeige, dass

$$\exp(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^4 + e^{-2} & -i(e^4 - e^{-2}) \\ i(e^4 - e^{-2}) & e^4 + e^{-2} \end{pmatrix}\ .$$

(13 Punkte)

Aufgabe 23.2 (Äquivalenzrelation)

Zeige, dass $R := \{(A,B) \mid B = Q^{-1}AQ \text{ für ein } Q \in GL(n,K)\} \subset \mathrm{Mat}(n \times n, K) \times \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Äquivalenzrelation ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 23.3 (Hauptachsentransformation)
Betrachte die Matrix $A \in \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SU}(3)$ aus Aufgabe 22.2:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Bestimme die normierten Eigenvektoren aus $\mathbb{C}^3$ und die komplexe Diagonalalform $\widehat{A} = X^\dagger A X$, $X \in \mathrm{U}(3)$. Nun ersetze die beiden komplexen Spalten von X durch deren normierten Real- und Imaginärteil, um eine Matrix $Y \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ zu erhalten. (Falls notwendig muss die letzte (reelle) Spalte von X durch ihr Negatives ersezt werden, damit Y eine Drehung ist, d.h. eine orthogonale Abbildung mit Determinante 1). Zeige, dass

$$\widetilde{A} := Y^T A Y == \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Warum stellt A eine Drehung um 315 Grad um die Drehachse.

(4 Punkte)