Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 22 (Aufgaben 22.1 - 22.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 5.6.2008

Aufgabe 22.1 (Eigenwerte)

Beweise:

a) Wenn $P(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt mit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, dann gilt auch $P(\overline{\lambda}) = 0$.

b) Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ hat das charakteristische Polynom χ_A eine reelle Nullstelle.

c) Sei $A \in SL(3, \mathbb{R}) = \{G \in GL(3, \mathbb{R}) \mid \det G = 1\}$, dann hat A einen positiven reellen Eigenwert.

(3 Punkte)

Aufgabe 22.2 (Drehung)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass A orthogonal ist, und dass A eine Drehung ist, d.h. $\det A{=}1$ oder $A{\in}\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Betrachte A als Matrix in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ und bestimme die Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Was sind die Beträge $|\lambda_i|$? Bestimme die Drehachse, d.h. der Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(4 Punkte)

Aufgabe 22.3 (Adjungierte Matrix)

a) Sei $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ selbstadjungiert und positiv definit, so dass B ein Skalarprodukt g auf $\mathbb{C}^n$ definiert:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto g(v, w) := v^T \cdot \overline{B} \cdot \overline{w} \ . \end{aligned}$$

Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ ein Endomorphismus und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ die dazugehörige Matrix.

Zeige, dass die Matrix des Adjungierten von L bezüglich g durch die Matrix $B^{-1} A^\dagger B$ gegeben ist. (Hinweis: für $B^\dagger = B$ gilt $(B^{-1})^\dagger = B^{-1}$).

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass B ein hermitesches Skalarprodukt g auf $\mathbb{C}^2$ definiert. Bestimme den Adjungierten bezüglich g von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 22.4 (Orthonormale Basen und Eigenvektoren)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine *reelle Struktur* auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ mit i) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall v \in V \,:\, \sigma(\alpha v) = \overline{\alpha} \cdot \sigma(v)$ und ii) σ ist eine *Involution*, d.h. $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$.
Für $\mathbb{C}^n$ ist die Komplexkonjugation $\sigma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, gegeben durch $\sigma(z) = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$ eine reelle Struktur. Sei $F \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ und w ein Eigenvektor von F zum Eigenwert $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Zeige:

a) $\overline{w}$ ist ein Eigenvektor von F zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

b) Die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w + \overline{w})$ und $v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(w - \overline{w}) \in \mathbb{C}^n$ liegen in $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. (Tipp: $\mathbb{R}^n$ ist der Unterraum von $\mathbb{C}^n$ invariant unter der Abbildung σ).

c) Die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ spannen den gleichen komplexen Unterraum U von $\mathbb{C}^n$ auf wie w und $\overline{w}$.

d) Ist $b \neq 0$, so bildet (v_1, v_2) eine Basis von U, bezüglich der $F|_U$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ hat. (Tipp: Beachte die Eigenwertgleichung für F und die Bilder der Basisvektoren).

e) Ist $b \neq 0$ und $(w, \overline{w})$ eine komplexe Orthonormalbasis von U, dann ist auch (v_1, v_2) eine.

(7 Punkte)