Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

## Lineare Algebra und analytische Geometrie
## SoSe 2008 Blatt 21 (Aufgaben 21.1 - 21.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 29.5.2008

---

**Aufgabe 21.1 (Polynome und Endomorphismen)**

Seien $V$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ eine Basis und $L$ der Endomorphismus von $V$, dessen Matrix bezüglich der gegebene Basis

$$L := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{Q}\,,$$

ist.

a) Sei $N = L - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Berechne $N^2, N^3, N^4, N^5$ und $N^{10}$.

b) Bemerke, dass $N$ und $\lambda\cdot$ id kommutieren. Benutze a) um $L^2, L^3, L^4, L^5$ und $L^{10}$ zu berechnen (vgl. Aufgabe 12.3).

c) Gib eine Formel fur $L^n$ für alle n $\geq 1$.

(7 Punkte)

**Aufgabe 21.2 (Normalformen)**

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$. Seien $L_1, L_2, M_1, M_2 \in$ End $(V)$ mit Matrizen bezüglich $B$ gegeben durch:

$$L_1 := \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; L_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; M_1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; L_1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;.$$

a) Bestimme $A \in \mathrm{Aut}\,(V)$ mit $M_1 = AL_1A^{-1}$ (Tipp: Basiswechsel durchführen).
b) Bestimme $B \in \mathrm{Aut}\,(V)$ mit $M_2 = BL_2B^{-1}$.
c) Warum sind $L_1, L_2, M_1, M_2$ nicht diagonalisierbar?

(6 Punkte)

**Aufgabe 21.3 (Unitäre Matrix)**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} \exp i\vartheta & 0 \\ 0 & \exp -i\vartheta \end{pmatrix} \;.$$

Finde eine unitäre Matrix $U$, so dass $U^{-1}AU = B$.

(3 Punkte)

**Aufgabe 21.4 (Eigenwerte und Eigenvektoren)**
Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen

$$-f'' = k^2 f \ ,$$

mit $f$ ein Element der $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$V := \left\{ f\colon [0,\pi] \to \mathbb{C} \ \mid \ f(0) = f(\pi)\,,\ f'(0) = f'(\pi),\ f \text{ glatt auf } [0,\pi] \right\}$$

kann auch als Eigenwertgleichung für den Endomorphismus $Lf := -f''$ verstanden werden (vgl. Aufgabe 18.2). Bestimme die Eigenwerte und entsprechenden Eigenfunktionen von $L \in \mathrm{End}\,(V)$.

(4 Punkte)