Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 20 (Aufgaben 20.1 - 20.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 22.5.2008

Aufgabe 20.1 (Der Satz von Cayley–Hamilton)

a) Verifiziere den Satz von Cayley–Hamilton für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Benütze diesen Satz um A^{-1} und A^5 zu berechnen.

b) Zeige, dass $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$, bzw. $C \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$, die Gleichungen

$$B^2 - \mathrm{Tr}\,(B)B + \det(B)I_2 = 0$$

bzw.

$$C^3 - \mathrm{Tr}\,(C)C^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\,(C)^2 - \mathrm{Tr}\,(C^2)\right)C - \det(C)I_3 = 0$$

erfüllen.

(6 Punkte)

Aufgabe 20.2 (Diagonalisieren von symmetrischen Matrizen)
Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A(x) := \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix} .$$

a) Zeige, dass die ersten 3 Spalten von $A(x)$ linear unabhängig für jedes x sind. Folgere, dass die Matrix $A(x)$ Rang ≥ 3 hat.

b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ so dass die Matrix $A(x)$ genau Rang $= 3$ hat.

c) Bestimme die Eigenvektoren der Matrix $A(2)$. (Tipp: Teil b)).

(4 Punkte)

Aufgabe 20.3 (Orthogonale Endomorphismen)

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ und $L \in \mathrm{End}\,(V)$ eine Isometrie (d.h. $\langle Lv\,,\, Lw\rangle = \langle v\,,\, w\rangle$).

a) Seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und $M(L)$ die Matrix von L bezüglich dieser Basis. Zeige, dass die Matrix $M(L^{-1})$ von L^{-1} die Matrix ist, die aus $M(L)$ durch "Spiegeln an der Hauptdiagonale" entsteht.

b) Zeige, dass $N = L + L^{-1}$ ein symmetrischer Endomorphismus bezüglich $\langle\, , \,\rangle$ ist.

c) Seien $W \subset V$ ein Untervektorraum, für den gilt $L(W) \subset W$, und $W^{\perp}$ sein orthogonales Komplement. Zeige, dass $L(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ gilt. (Analog wie bei invrianten Unterräumen symmetrischer Endomorphismen.)

d) Sei v ein Eigenvektor von N. Zeige, dass $v, Lv, L^{-1}v$ linear abhängig sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 20.4 (Die Spur)

Zeige, dass für den K-Vektorraum $V := \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & K \\ (A, B) & \mapsto & \langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}\,(A^T B) \end{array}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ definiert.

Im Spezialfall $K = \mathbb{R}$ handelt es sich bei diesem Matrizenraum um einen euklidischen Vektorraum. Zeige: In diesem Raum stehen die symmetrischen Matrizen und die schiefsymmetrischen Matrizen senkrecht aufeinander; d.h. ist A eine symmetrische und B eine schiefsymmetrische Matrix, so gilt $\langle A, B\rangle = 0$.

(5 Punkte)