Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 1.11.2007

Aufgabe 2.1 (Körperaxiome)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, seien $a, b, c, d \in K$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Beweise folgende Aussagen und gib bei jedem Schritt an, welches Axiom bzw. welchen Satz benutzt wird:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

d) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{ad}{bc}$ (Hier sei auch $c \neq 0$). (5 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Gleichungssysteme)

a) Löse über $\mathbb{Q}$ (also suche Lösungen in $\mathbb{Q}$, wie auf der Schule gelernt) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 2 \\ 2x + 5y &= 3 \,. \end{aligned}$$

b) Bestimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7.
Beispiel: $(4 \bmod 7)\cdot(5 \bmod 7) \equiv 20 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$.

c) Löse das folgende Kongruenzsystem, indem *dasselbe Verfahren* wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod 7 \,. \end{aligned}$$

d) Warum ist das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

nicht lösbar? (5 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Rechnen mit Kongruenzen)

a) Kongruenzklassen modulo 7 lassen sich addieren und multiplizieren. Sei $\mathbb{F}_7$ die Menge aller Kongruenzklassen modulo 7, repräsentiert durch $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Zeige mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 2.2, dass $\mathbb{F}_7$ ein Körper ist.

b) Zeige möglichst einfach, dass die Menge der Kongruenzklassen modulo 4 kein Körper ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Potenzmenge)

Sei X eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von X in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ gibt.

Hinweis. Nehme an, es gäbe doch eine, sagen wir $f : X \to \mathcal{P}(X)$, und leite einen Widerspruch her. Überlege dazu, ob $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ im Bild von f liegen kann.

(5 Punkte)