Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008   Blatt 19 (Aufgaben 19.1 - 19.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 15.5.2008

Aufgabe 19.1 (Algebraische Eigenwertprobleme)

a) Zeige, dass eine hermitesche Matrix $H \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$ zwei verschiedene Eigenwerte haben muss, es sei denn, dass sie ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

b) Finde eine unitäre Matrix, die die hermitesche Matrix $P := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 19.2 (Symmetrische Endomorphismen)

Sei Endomorphismus L von $\mathbb{R}^2$ gegeben (bezüglich der Standardbasis) durch die Matrix

$$A = M(L) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

a) Bestimme $\lambda_1 . \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass der Rang von $A - \lambda_1 \mathbb{1}_2$ und $A - \lambda_2 \mathbb{1}_2$ kleiner als 2 ist.

b) Zeige, dass es eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ (mit standard Skalarprodukt) gibt, so dass $Lf_i = \lambda_i f_i \ , \ i = 1, 2.$

c) Bestimme die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basis $\{f_1, f_2\}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 19.3 (Die Cramer'sche Regel)

Löse mit der Cramerschen Regel die linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 19.4 (Charakteristische Polynome)

Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die charakteristischen Polynome $\chi_A(T) := \det(A - T \cdot \mathrm{id})$ (bzw. $\chi_B(T)$) von A (bzw. B).

b) Zeige, dass $\chi_A(A) = \chi_B(B) = 0$.

c) Seien $M_A(T) := (T-2)(T-3)^3$ und $M_B(T) := (T-2)^2(T-3)^2$. Zeige, dass

$$M_A(A) = 0 \quad , \quad M_A(B) \neq 0 \quad , \quad M_B(A) \neq 0 \quad \text{und} \quad M_B(B) = 0 \; .$$

d) Folgere, dass es keine Matrix C gibt mit $B = CAC^{-1}$. (Tipp: Polynom(CAC^{-1})=?).

e) Zeige dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist. (Tipp: Rang!)

(7 Punkte)