Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 18 (Aufgaben 18.1 - 18.3)

Abgabe vor der Vorlesung am 7.5.2008

Aufgabe 18.1 (Algebraische Eigenwertprobleme)

a) Finde die Eigenvektoren der Matrix

$$K := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass nur zwei davon linear unabhängig sind. (2 Punkte)

b) Diagonalisiere

$$L := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad M := \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und berechne L^3, M^{100}, N^5. (3 Punkte)

c) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $x_i,\ i = 1,2,3,4$. Sei $L\colon V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$x_1 \mapsto x_2 \quad , \quad x_2 \mapsto x_3 \quad , \quad x_3 \mapsto x_4 \quad , \quad x_4 \mapsto x_1 \ .$$

Bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von L. (3 Punkte)

Aufgabe 18.2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen

$$-f'' = \lambda f \ ,$$

mit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, kann auch als Eigenwertgleichung für den Endomorphismus $Lf := -f''$ verstanden werden. Prüfe nach, dass L symmetrisch ist bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^a f(x)g(x)\,dx$, wobei L Endomorphismus auf

$$V := \left\{ f\colon [0,a] \to \mathbb{R} \mid f'(0) = f'(a) = 0,\ f \text{ glatt auf } [0,a] \right\}$$

ist und $f, g \in V$. Für welche $A, B \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist $f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$ eine Eigenfunktion von $L \in \mathrm{End}(V)$? Bestimme die zugehörigen Eigenwerte und normalisiere die Eigenfunktionen bezüglich $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 18.3 (Pauli-Matrizen)
Sei

$$I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Mit Hilfe dieser Matrizen läßt sich jede komplexe 2×2 Matrix $M \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ in der Form $M = \frac{1}{2}\left(a_0 I_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right)$ darstellen.

a) Zeige, dass die Matrizen σ_a , $a = 1, 2, 3$, hermitesch sind.

b) Zeige: $(\sigma_a)^2 = I_2$ für $a = 1, 2, 3$.

c) Weise nach, dass $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ gilt und berechne auch die Produkte $\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_2$, $\sigma_3\sigma_1$.

d) Nun zeige, dass

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab} I_2 + i \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c \ ,$$

wobei ϵ_{abc} das schiefsymmetrische Levi-Civita Symbol und δ_{ab} der Kronecker-Delta ist:

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & \text{falls (a,b,c) eine gerade Permutation von (1,2,3) ist} \\ -1 & \text{falls (a,b,c) eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist} \\ 0 & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind} \end{cases}$$

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = b \\ 0 & \text{falls } a \neq b \ . \end{cases}$$

Die Matrizen $\{\pm I_2, \pm i\sigma_a \ , \ a = 1, 2, 3\}$ stellen die Elemente von $\mathbb{H}$ (definiert in Aufgabe 10.6 (WS)) dar.

e) Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

(6 Punkte)